88370

WATERBOUWKUNDIG LABORATORIUM
BORGERHOUT
BIBLIOTEEK
5650

PLAN INCLINE DE RONQUIERES

Considérations sur le mouvement de l'eau et d'un bateau non amarré dans le sas roulant soumis brusquement à un régime d'accélération.

I 1978

0307 001 7170

Dressé par l'Ingénieur en chef-Directeur
au Laboratoire de Recherches Hydrauliques
à Borgerhout-Anvers, le 4.4.1960.

O. D'HEYGERS.

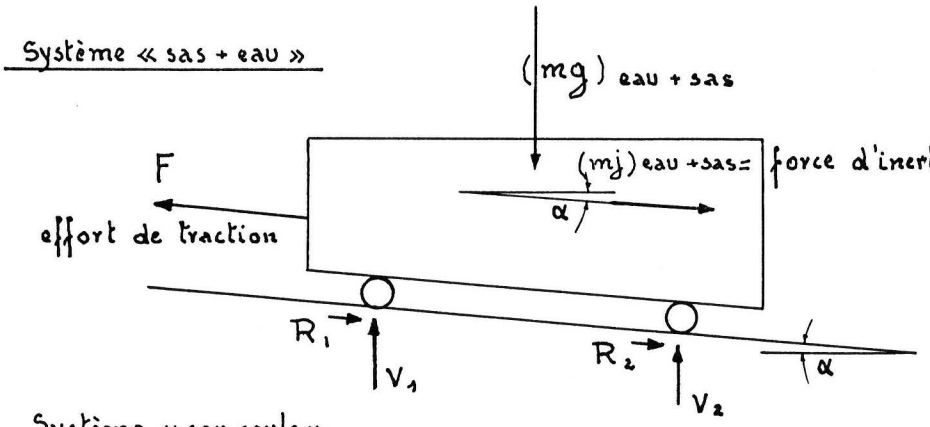
L'Ingénieur en chef-Directeur des
Ponts et Chaussées, Directeur du
Laboratoire de Recherches Hydrauliques.

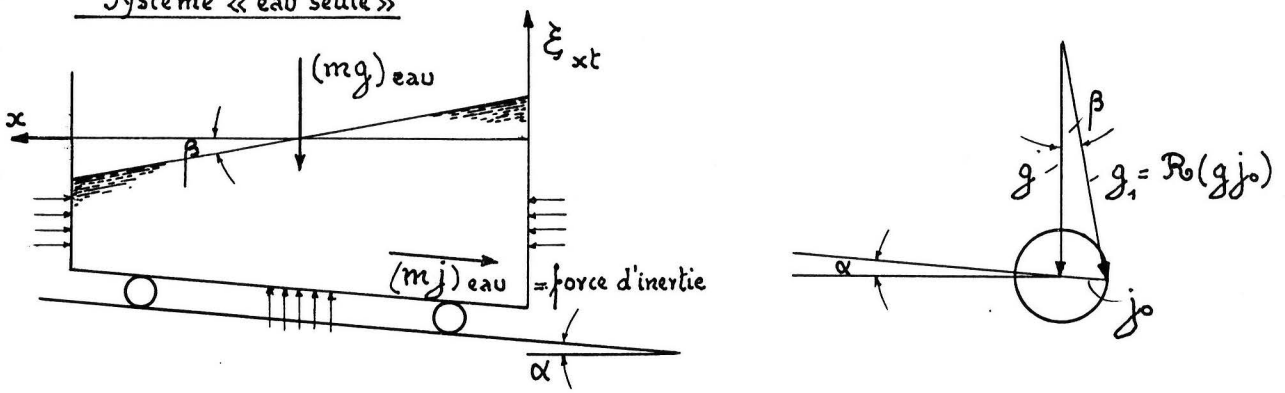
A. STERLING.

1420

§ I. Influence de l'inclinaison α des rails.

On suppose le sas sans bateau, mais soumis à j_o constant, alors que l'eau occupe une position d'équilibre relativement à cette sollicitation.





g_1 est perpendiculaire au plan d'eau.

Le diagramme polaire montre que pour $\frac{j_o}{g}$ petit (et $\frac{0.01}{9.81}$ est petit) la résultante $\overline{g}_1$ est quasi verticale et proche de la tangente au petit cercle de rayon j_o lorsque α est petit, or $\alpha = 5\,\%$.

donc $\beta \cong \frac{j_o}{g} = \frac{0.01}{9.81} = 0.00102$ rad. $= 3'\,30''$.

Conclusion. α est peu influent, pour la suite nous prenons $\alpha = 0$; de telle façon :

1°) nous facilitons les calculs ultérieurs,

2°) nous faisons une hypothèse défavorable, sauf au cas où α serait proche de arc $\sin\frac{j_o}{g}$, auquel cas la valeur de β est théoriquement maximum mais pratiquement égale à celle correspondant à $\alpha = 0$.

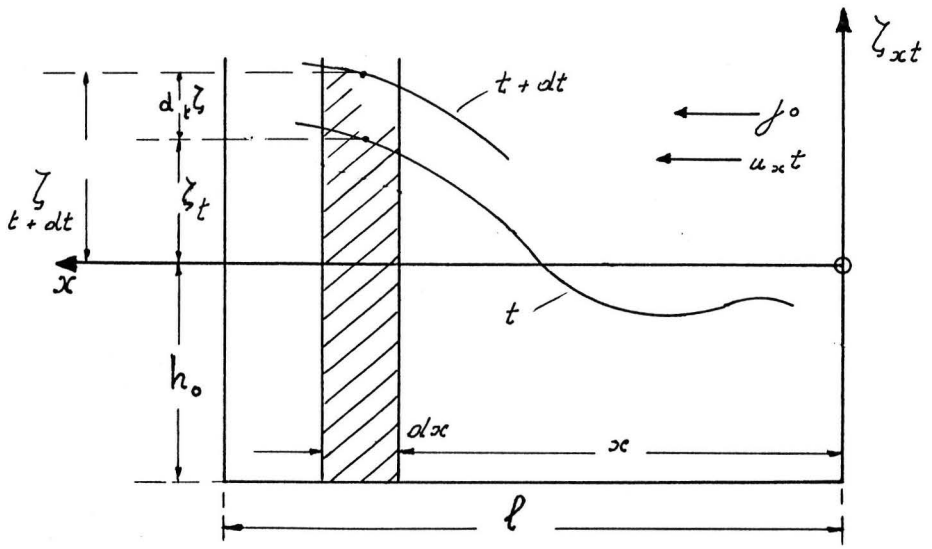
§ 2 Les seiches à vide en eaux superficielles

Hypothèses de départ :

1/ $\alpha = 0$ justifié (voir ci-dessus)

2/ h_0 = petit par rapport aux longueurs d'ondes longitudinales produites (à vérifier au moyen des formules obtenues par cette hypothèse).

Nous supposons que le mouvement périodique : gauche → droite alterné avec droite → gauche intéresse toute la profondeur d'une tranche verticale. C'est plausible lorsque la longueur d'onde longitudinale est grande par rapport à la profondeur h_0. Ce n'est plus plausible si les formules indiquent certaines ondes trop courtes par rapport à la profondeur. d'où la réserve du 2/



$d\zeta$ petit devant ζ

ζ petit devant h_0

h_0 petit devant l

1) Equation de continuité en une tranche d'abcisse x et d'épaiss^r dx (x et dx immobiles) entre t et $t+dt$.

a) augmentation de volume de la tranche =

$$= (d_t \zeta)(d_x) b = b \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt\, dx$$

b) volume qui entre par la droite

$$= \Omega u_x\, dt = b h_o u_x\, dt$$ en négligeant ζ et $d\zeta$ devant h_o

c) volume qui sort par la gauche

$$= \Omega u_{x+dx}\, dt = b h_o \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dt.$$

d) la différence des volumes b) et c)

= l'augmentation de volume a).

$$b h_o u_x\, dt - b h_o \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right) dt = \frac{b \partial \zeta}{\partial t} dt\, dx \quad . \quad h_o \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0} \qquad (1)$$

2) Equation du mouvement suivant x au temps t.

équation fondamentale de la dynamique : $\Sigma m_j = \Sigma F_e$.

dont nous ne retenons que la projection sur l'axe x.

$$(\Sigma m_j)_x = (\Sigma F_e)_x .$$

$(\Sigma m_j)_x$ = m_j d'entraînement du sas + mj du mouvement relatif du sas

$$= + m j_o + m \frac{\partial u}{\partial t}$$

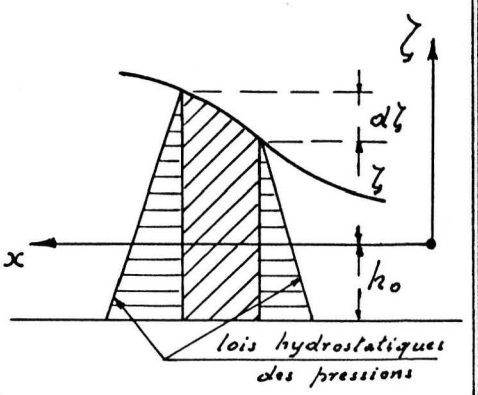
(ΣF_e) = :

a) à droite $\dfrac{(h_o + \zeta)^2 b \rho}{2}$

b) à gauche $-\dfrac{(h_o + \zeta + d\zeta)^2 b \rho}{2}$

où ρ = poids spécifique de l'eau en T./m^3

(introduit surtout pour vérifier les formules obtenues au point de vue des dimensions)



c/ somme

$$(\Sigma F_e)_x = \frac{(h_o+\zeta)^2 b\rho}{2} - \frac{(h_o+\zeta+d\zeta)^2 b\rho}{2}$$

$$= \frac{b}{2}\left[h_o+\zeta+h_o+\zeta+d\zeta\right]\left[h_o+\zeta-h_o-\zeta-d\zeta\right]\rho$$

$$= -b h_o\, d\zeta\rho \quad \text{en négligeant } \zeta \text{ et } d\zeta \text{ devant } h_o$$

d/ $mg = P = \rho b\left(h_o + \zeta + \frac{d\zeta}{2}\right)dx$ (négligeables)

$$m = \frac{b\rho}{g} h_o\, dx$$

e/ substituant m et $(\Sigma F_e)_x$ dans l'équation :

$$\frac{b}{g} h_o\, dx\left[+j_o + \frac{\partial u}{\partial t}\right] = -b h_o\, d\zeta.$$

d'où $$\boxed{+j_o + \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}} \qquad (2)$$

3/ Elimination de ζ entre les 2 équations différentielles obtenues.

$$(2)' \quad \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = -g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial t}.$$

$$(1)' \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\, \partial x} + h_o\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(1)'' \quad g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\, \partial x} + g h_o\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{posons } g h_o = c^2$$

$$(1)''' \quad g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t\, \partial x} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$(2)' - (1)''' \rightarrow$ $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$

équation différentielle hyperbolique

4/ Recherche de la forme générale des solutions particulières de l'équation différentielle hyperbolique

nous utilisons la méthode d'intégration de Bernouilli.

posons $u = X_{(x)}\ T_{(t)}$ où $X_{(x)}$ indépendant de t

$T_{(t)}$ " " " x.

$$X_{(x)}\ T''_{(t)} = c^2 X''_{(x)}\ T_{(t)}$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{c^2 X''}{X} \quad \text{posons} = \pm \omega^2$$

la solution $+\omega^2$ est à écarter : elle mène à des expressions exponentielles qui ne satisfont pas aux limites.

il reste : $$\boxed{\frac{T''}{T} = \frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2}$$

cherchons T et X

$T'' + \omega^2 T = 0$ d'où $\boxed{T = A \sin \omega t + B \cos \omega t}$

$X'' + \frac{\omega^2}{c^2} X = 0$ d'où $\boxed{X = C \sin \frac{\omega x}{c} + D \cos \frac{\omega c}{c}}$

L'équation différentielle hyperbolique est satisfaite par chaque solution particulière de la forme :

$$\boxed{u_{partic.} = \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t\right)\left(C \sin \frac{\omega x}{c} + D \cos \frac{\omega x}{c}\right)}$$

5/ Détermination des valeurs possibles pour ω par la considération que $u = 0$ aux points $x = 0$ et $x = l$:

En effet, près des parois la vitesse horizontale est nulle car par la paroi il n'entre pas d'eau et il n'en peut sortir.

a) pour $x = 0$ $\quad t$ = quelconque $\quad u_0 = 0$

$$0 = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)[C \times 0 + D \times 1].$$

peut prendre toutes les valeurs — doit donc être = 0

d'où $D = 0$

b) pour $x = \ell$ $\quad t$ = quelconque $\quad u_\ell = 0$

$$0 = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\, C \sin \frac{\omega \ell}{c}$$

peut prendre toutes les valeurs — doit donc être = 0

d'où $\frac{\omega \ell}{c} = k\pi$ $\qquad \omega = \frac{ck\pi}{\ell}$ $\qquad \frac{\omega x}{c} = \frac{k\pi x}{\ell}$

k : nombre entier

c) l'équation qui donne $u_{partic.}$ en fonction de $\underline{t}$ et de $\underline{x}$ devient donc :

$$u = (A \sin \omega t + B \cos \omega t)\, C \sin \frac{k\pi x}{\ell} \quad \text{où } k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Dans cette équation nous pouvons faire rentrer la constante C dans les constantes A et B, d'où la forme de chaque solution particulière :

$$\boxed{u_{partic.} = \left(A \sin \frac{k\pi ct}{\ell} + B \cos \frac{k\pi ct}{\ell}\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}}$$

avec $k = 1, 2, 3 \ldots\ldots$

6) <u>Solution générale de l'équation différentielle hyperbolique</u>

$$u_{général} = \sum_{k \text{ entiers}} \left[\left(A_k \sin \frac{k\pi ct}{\ell} + B_k \cos \frac{k\pi ct}{\ell}\right) \sin \frac{k\pi x}{\ell}\right]$$

Les valeurs des coefficients A_k et B_k sont à déterminer par les conditions aux limites, tant pour u que pour ζ, cherchons donc d'abord l'expression de ζ.

7) Expression de ζ en fonction de x et de t

Nous en avons besoin:

a) pour vérifier si lors des dérivations qui ont mené à l'équation différentielle hyperbolique et qui comportaient la disparition du terme j_o, nous n'avons pas créé des solutions incompatibles avec les 2 équations de départ.

b) pour déterminer des coefficients A_k et B_k par les conditions aux limites.

Reprenons donc l'équation de continuité.

$$(1)\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_o \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad h_o = \frac{c^2}{g}$$

$$(1)'\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{c^2}{g}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k\ \text{entiers}} \left[\left(A_k \sin\frac{k\pi ct}{l} + B_k \cos\frac{k\pi ct}{l} \right) \frac{k\pi}{l} \cos\frac{k\pi x}{l} \right]$$

$$(1)''\quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-\pi c^2}{lg} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[\left(A_k \sin\frac{k\pi ct}{l} + B_k \cos\frac{k\pi ct}{l} \right) k \cos\frac{k\pi x}{l} \right]$$

intégrons par rapport à t

$$\boxed{\zeta = \frac{-c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[\cos\frac{k\pi x}{l} \left(-A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin\frac{k\pi ct}{l} \right) \right] + f(x)}$$

où $f(x)$ est la constante d'intégration indépendante de t.

8) Détermination de la fonction $f(x)$

reprenons maintenant l'équation du mouvement suivant x.

$$(2)\quad +j_o + \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi c}{l} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[k \left(A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} - B_k \sin\frac{k\pi ct}{l} \right) \sin\frac{k\pi x}{l} \right]$$

$$-g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{-c\pi}{l} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[k \left(\sin\frac{k\pi x}{l} \right) \left(-A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin\frac{k\pi ct}{l} \right) \right] - g f'(x)$$

(2)' $+j_0 = -g f'(x)$

Examinons cette expression:

a) au point de vue $\underline{t}$: le second membre est indépendant de t, il faut donc que le 1er le soit, donc $j_0 = c^{te}$. Comme cette condition est réalisée, jusqu'à présent, les solutions u et ζ sont valables.

b) au point de vue x : $f'(x) = \frac{-j_0}{g}$ $\quad f(x) = \frac{-j_0}{g}x + c$

$f(x)$ est un terme constituant de la somme qui donne ζ, c'est donc une hauteur d'eau et la constante que contient le second membre de la dernière expression fait augmenter ou diminuer cette hauteur d'eau sur toute la longr l du sas, si C est trop grand, le volume d'eau total augmente, si C est trop petit, le volume total diminue. Or, ce volume total est invariable et pour déterminer C il suffit donc d'exprimer que le volume d'eau est invariable à un instant t.

$$\int_0^l \zeta\, dx = 0 \qquad \text{soit } \zeta = \eta + f(x)$$

$$\int_0^l \eta\, dx + \int_0^l f(x)\, dx = 0$$

$$\int_0^l \eta\, dx = \frac{-c}{g} \sum_{k \text{ entiers}} \left[-A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\, dx + B_k \sin\frac{k\pi ct}{l} \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\, dx \right]$$

$$= \frac{-c}{g} \sum_{k \text{ entiers}} \left\{ -A_k \cos\frac{k\pi ct}{l} \left[\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{\frac{k\pi}{l}} \right]_0^l + B_k \frac{\sin k\pi ct}{l} \left[\frac{\sin\frac{k\pi x}{l}}{\frac{k\pi}{l}} \right]_0^l \right\}$$

$$= \frac{c}{\pi g} \sum_{k \text{ entiers}} \left\{ \frac{-A_k}{k} \cos\frac{k\pi ct}{l} + \frac{B_k}{k} \sin\frac{k\pi ct}{l} \right\} \underbrace{\sin k\pi}_{0} = 0$$

donc $\int_0^l \zeta\, dx = \int_0^l f(x)\, dx = \frac{-j_0}{g}\frac{l^2}{2} + cl = 0$

d'où $\quad C = \frac{+j_0}{gl}\frac{l^2}{2} = \frac{+j_0 l}{2g}$

$$\boxed{f(x) = \frac{+j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right)}$$

et nous pouvons préciser l'expression de ζ comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} &\zeta = \eta + f(x) \\ &\text{avec } \eta = \frac{-c}{g} \sum_{k \text{ entiers}} \left[\cos \frac{k\pi x}{l}\left(-A_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin \frac{k\pi ct}{l}\right)\right] \\ &f(x) = \frac{+j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right) \end{aligned}}$$

ζ se compose d'une partie linéaire $f(x)$, bien déterminée dès que j_0 et l sont imposés et d'une partie sinusoïdale η dont l'amplitude et la période dépendent des conditions aux limites et de h_0 mais qui est indépendant de j_0.

On peut concevoir des conditions aux limites telles que tous les coefficients A_k et B_k soient nuls. Dans ce cas ζ ne varie plus avec le temps et un plan d'équilibre est réalisé suivant l'oblique $\zeta = \frac{-j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right) = f(x)$

Ce plan ne reste stable que pour autant que j_0 est maintenu ; c'est donc une surface d'équilibre relatif.

D'autre part l'expression $\eta = \zeta - f(x)$ donne le remous par rapport à cette surface d'équilibre relatif.

---

9) Détermination des constantes A_k et B_k par les conditions aux limites.

Supposons que le sas parte du repos au moment $t = 0$ en tout point $u = 0$. Soit un point de surface P_{xt}.

$$\zeta_{x0} = 0 \qquad \eta_{x0} = -f(x) = \frac{-j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

$$u_{x,0} = 0 = \sum_{k\ \text{entiers}} \left(B_k \sin \frac{k\pi x}{l}\right)$$ quel que soit x.
donc tous les B_k sont nuls.

$$\eta_{x0} = \frac{-c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} (-A_k) \cos \frac{k\pi x}{l} = \frac{-j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

a) pour $x = \frac{l}{2} + \varepsilon$:

$$\eta_{x0} = \frac{-j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} - \varepsilon\right) = \frac{c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[A_k \cos \frac{k\pi}{l}\left(\frac{l}{2} + \varepsilon\right)\right]$$

d'où $$\frac{+j_0 \varepsilon}{g} = \frac{c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[A_k \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi\varepsilon}{l}\right)\right]$$

b) pour $x = \frac{l}{2} - \varepsilon$:

$$\eta_{x0} = \frac{-j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} + \varepsilon\right) = \frac{c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[A_k \cos \frac{k\pi}{l}\left(\frac{l}{2} - \varepsilon\right)\right]$$

d'où $$\frac{-j_0 \varepsilon}{g} = \frac{c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} \left[A_k \cos\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi\varepsilon}{2}\right)\right]$$

c) en additionnant les 2 on obtient :

$$0 = \frac{c}{g} \sum_{k\ \text{entiers}} A_k \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi\varepsilon}{2}\right)\right]$$

pour $\sum_{k\ \text{impairs}}$ l'expression entre [ ] est nulle. (se comporte comme somme de cosinus d'angles supplémentaires.)

donc il faut que : $\sum_{k\ \text{pairs}} A_k \left[\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi\varepsilon}{2}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi\varepsilon}{2}\right)\right] = 0$ quels que soient les ε, donc quels que soient les x ; ce qui ne se peut que lorsque tous les A_k pour k pair sont nuls.

d) les formules deviennent ainsi :

$$u = \sum_{k \text{ impairs}} \left[A_k \sin \frac{k\pi ct}{\ell} \sin \frac{k\pi ct}{\ell} \right]$$

$$\eta = \frac{c}{g} \sum_{k \text{ imp.}} \left[A_k \cos \frac{k\pi ct}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} \right]$$

$$f(x) = \frac{+j_0}{g} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \qquad \zeta = \eta + f(x)$$

e) reprenons η_{x_0} qui devient :

$$\eta_{x_0} = \frac{c}{g} \sum_{k \text{ imp.}} \left(A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \right) = \frac{-j_0}{g} \left(\frac{\ell}{2} - x \right)$$

nous y reconnaissons la forme d'une serie de Fourier ; notamment :

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ imp.}} \left[\frac{\cos k \left(\frac{\pi}{\alpha} - \gamma \right)}{k^2} \right] \qquad \text{applicable pour } \frac{-\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

assimilons les 2 expressions :

$$\sum_{k \text{ imp.}} \left[\frac{\cos k \left(\frac{\pi}{\alpha} - \gamma \right)}{k^2} \right] = \frac{\pi \gamma}{4} \qquad \text{et} \quad \sum_{k \text{ imp.}} \left[A_k \cos \frac{k\pi c}{\ell} \right] = \frac{-j_0}{c} \left(\frac{\ell}{2} - x \right)$$

d'où $\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi x}{\ell}$ ou $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{\ell}$

La condition $\frac{-\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ devient $\ell > x > 0$ et est vérifiée.

puis $$\frac{4}{k^2 \pi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{\ell} \right)} = \frac{-A_k c}{j_0 \left(\frac{\ell}{2} - x \right)}$$

d'où $$\boxed{A_k = \frac{-4 j_0 \ell}{c \pi^2 k^2}}$$

f) les formules générales deviennent :

$$u_{xt} = \frac{-4j_0 l}{c\pi^2} \sum_{k\,imp.} \left[\frac{\sin\frac{k\pi ct}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}}{k^2} \right]$$

$$\eta_{xt} = \frac{-4j_0 l}{\pi^2 g} \sum_{k\,imp.} \left[\frac{\cos\frac{k\pi ct}{l} \cos\frac{k\pi x}{l}}{k^2} \right]$$

$$f_{xt} = \frac{+j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\zeta = \eta + flx$$

$$c^2 = gh_0'$$

10) Forme de la surface d'eau à l'instant t quelconque.

Voyons si la surface est plane.

En ce cas il faut $\frac{\partial \eta}{\partial x} = c^{ste}$ indépendante de x.

où $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{+4j_0 l}{\pi^2 g} \sum_{k\,imp.} \left(\frac{\cos\frac{k\pi ct}{l} \cos\frac{k\pi x}{l}}{k^2} \right) \frac{k^2\pi^2}{l^2}$$

$$= \frac{4j_0}{gl} \sum_{k\,imp.} \cos\frac{k\pi ct}{l} \cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$= \frac{4j_0}{gl} \sum_{k\,imp.} \cos k\alpha \cos k\beta \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\pi ct}{l} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\pi x}{l}$$

$$\sum_{k\,imp} \cos k\alpha \cos k\beta = \frac{1}{2} \sum_{k\,imp} \left[\cos k(\alpha+\beta) + \cos k(\alpha-\beta) \right]$$

Pour $t = 0$ $\sum_{k\,imp.} \cos k\beta = 0$ car la surface y est plane.

Cherchons l'expression analytique de $\sum_{k\,imp.} \cos k\beta$.

$$\cos(k-2)\beta = \cos k\beta \cos 2\beta + \sin k\beta \sin 2\beta.$$

écrivons cette équation pour $k = 3, 5 \ldots\ldots k$. et totalisons :

$$\sum_{1}^{k-2} \cos k\beta = \cos 2\beta \sum_{3}^{k} \cos k\beta + \sin 2\beta \sum_{3} \sin k\beta$$

que nous pouvons écrire :

$$\sum_{1}^{k} \cos k\beta = \cos k\beta - \cos 2\beta \left[\sum_{1}^{k} \cos k\beta - \cos \beta\right] - \sin 2\beta \left[\sum_{1}^{k} \sin k\beta - \sin \beta\right]$$

ou en posant $\sum_{1}^{k} \cos k\beta = C_k$ $\qquad$ $\sum_{1}^{k} \sin k\beta = S_k$

$$(1)\quad [1 + \cos 2\beta] C_k + [\sin 2\beta] S_k = \cos k\beta + (\cos 2\beta \cos\beta + \sin 2\beta \sin\beta)$$

$$= \cos k\beta + \cos\beta$$

de même en additionnant

$$\sin(k-2)\beta = \sin k\beta \cos 2\beta - \cos k\beta \sin 2\beta.$$

on trouve de la même façon :

$$(2)\quad [-\sin 2\beta] C_k + [1 + \cos 2\beta] S_k = \sin k\beta - \sin \beta$$

La résolution de ce système de 2 équations donne :

$$C_k = \frac{1 + \cos(k+1)\beta}{\cos \beta}$$ quel que soit β comme vu plus haut.

donc k_∞ est un nombre impair infini réalisant $(k_\infty + 1)\beta$ = multiple de π $= K_\infty \pi$.

k_∞ et K_∞ sont fonctions de β.

Pour que $\sum_{k \text{ imp.}} \cos k(\alpha+\beta) + \sum_{k \text{ imp.}} \cos k(\alpha-\beta) = 0$

quel que soit β, il faut que

$$\frac{1 + \cos(k_\infty + 1)(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} + \frac{1 + \cos(k_\infty + 1)(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = 0$$

or: $[1+\cos(k_\infty+1)(\alpha+\beta)]\cos(\alpha-\beta)+[1+\cos(k_\infty+1)(\alpha-\beta)]\cos(\alpha+\beta)=0$

quel que soit β.

- donc pour $\beta=0$ $[1+\cos(k_\infty+1)\alpha]\cos\alpha+[1+\cos(k_\infty+1)\alpha]\cos\alpha=0$

il faut donc $(k_\infty+1)\alpha$ = multiple de π ; $k_\infty+1$ est pair, mais quelconque avec β ; il faut donc que α = multiple de $\frac{\pi}{2}$ $= m\frac{\pi}{2}$

cette condition est donc nécessaire, d'autre part elle est suffisante, car

$$\frac{[1+\cos(k_\infty+1)(m\frac{\pi}{2}+\beta)]\cos(\alpha-\beta)}{\cos(m\frac{\pi}{2}+\beta)}+\frac{[1+\cos(m\frac{\pi}{2}-\beta)(k_\infty+1)]\cos(\alpha+\beta)}{\cos(m\frac{\pi}{2}-\beta)}=0$$

Les [.....] des numérateurs des 2 termes sont nuls et les dénominateurs ne le sont pas.

les valeurs $\alpha=0$ $\frac{\pi}{2}$ π $\frac{3\pi}{2}$ 2π etc. répondent à la condition.

Donc pour les instants $t=0$, $\frac{l}{2c}$, $\frac{l}{c}$, $\frac{3l}{2c}$ etc. (soit $t=n\frac{l}{2c}$ où $n=0,1,2,3,....$) la surface d'eau est plane.

A tout autre instant intermédiaire, la surface d'eau n'est pas plane, mais elle est antisymétrique par rapport au point $x=\frac{l}{2}$ puisque dans l'expression donnant η, pour deux points situés respectivement en : $x=\frac{l}{2}+\varepsilon l$ et $x=\frac{l}{2}-\varepsilon l$, les termes $\cos k\pi(\frac{1}{2}+\varepsilon)$ et $\cos k\pi(\frac{1}{2}-\varepsilon)$ sont toujours égaux et de signes contraires.

(11) Mouvement d'un point x en fonction du temps.

$$\eta_{xt}=\frac{-4j_0 l}{\pi^2 g}\sum_{k\ imp.}\frac{\cos\frac{k\pi ct}{l}\ \cos\frac{k\pi x}{l}}{k^2}$$

dérivons 2 fois par rapport à t.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{4 j_0 l c^2}{g} \sum_{k\ imp.} \cos \frac{k\pi c t}{l} \cos \frac{k\pi x}{l}$$

Σ à la même expression comme au 1°) ci-devant.

donc, afin que $\eta_x = f(t)$ soit une fonction linéaire il faut que

$$\left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\alpha+\beta)\right]\cos(\alpha-\beta) + \left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\alpha-\beta)\right]\cos(\alpha+\beta) = 0$$

quel que soit α.

donc pour $\alpha = 0$

$$\left[1 + \cos(k_{\infty}+1)\beta\right]\cos\beta + \left[1 + \cos(k_{\infty}+1)\beta\right]\cos\beta = 0$$

ou $(k_{\infty}+1)\beta$ = multiple de π $\qquad \beta = m\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ ou $x = m\frac{l}{2}$ avec $m = 0, 1, 2$

voyons si cette condition est suffisante

$$\left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\alpha + m\tfrac{\pi}{2})\right]\cos(\alpha - m\tfrac{\pi}{2}) + \left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\alpha - m\tfrac{\pi}{2})\right]\cos(\alpha + m\tfrac{\pi}{2}) = 0\ ?$$

Cette équation est vérifiée

car $\left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\beta \pm \frac{m\pi}{2})\right] = 0$

pour toute valeur $0 < \beta < 1$ $\qquad$ et $\alpha = \frac{m\pi}{2}$

donc $\left[1 + \cos(k_{\infty}+1)(\alpha \pm \frac{m\pi}{2})\right] = 0$

pour toute valeur $0 < \alpha < 1$ $\qquad$ et $\beta = \frac{m\pi}{2}$

et $\sum_{k\ imp.} \cos k\alpha \cos k\beta = 0$ pour toute valeur de α

lorsque $\beta = m\frac{\pi}{2}$ $\qquad m = 0, 1, 2.$

En ces points le mouvement périodique, tout en se composant de plusieurs mouvements oscillatoires sinusoïdaux, n'est pas sinusoïdal mais linéaire.

En ces points la dénivellation est proportionnelle au temps et la vitesse verticale est constante.

En plus elle est nulle au point $x = \frac{l}{2}$

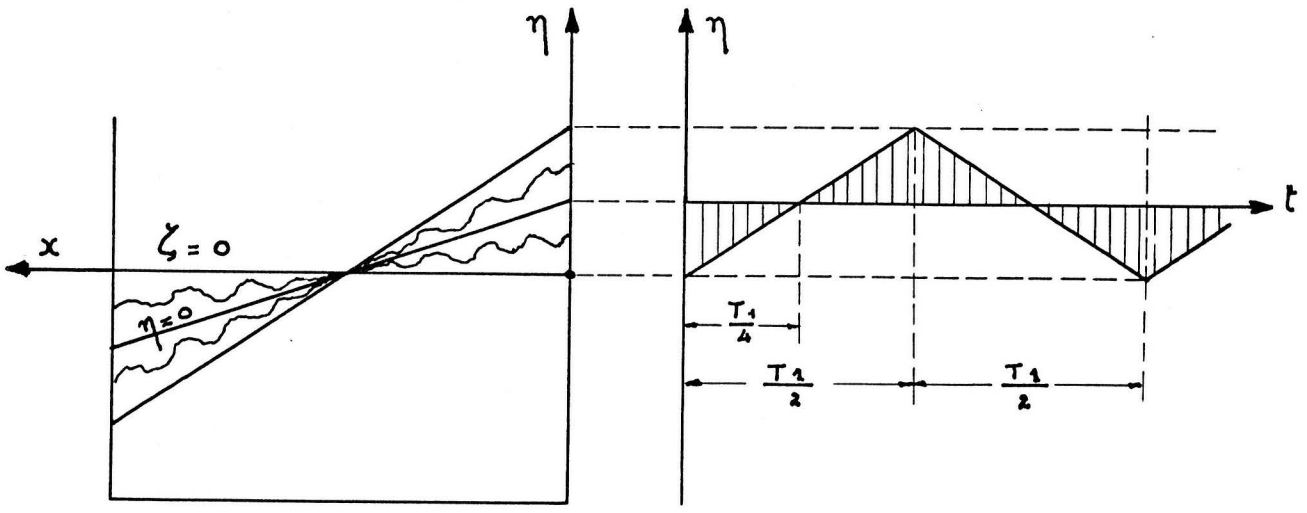
Aux points intermédiares le mouvement $\eta_t = f(t)$ n'est pas linéaire mais il est antisymétrique.

$$\eta_{\frac{T}{4} - \tau} = -\eta_{\frac{T}{4} + t}$$

par rapport à la position du point x au moment

$$t = \frac{T_1}{4} = \frac{l}{2c} \quad \text{auquel} \quad \eta = 0$$

GRAPHIQUE η_t pour $x = 0$



Au point $x = 0$ nous avons successivement :

pour $t = 0$ $\quad \eta_{00} = \frac{-4 j_0 l}{n^2 g} \sum_{k\ imp.} \frac{1}{k^2} = \frac{-j_0 l}{2g}$

pour $t = \frac{T_1}{4}$ où T_1 = période de l'oscillation de l'onde fondamentale ($k = 1$.)

$$= \frac{2l}{c}$$

$$\eta_{o,\frac{T_1}{4}} = 0$$

pour $t = \frac{T_1}{2}$ $\quad \eta_{o.\frac{T_1}{2}} = \frac{j_o l}{2g}$

pour $t = \frac{3T_1}{2}$ $\quad \eta_{o\frac{3T_1}{2}} = 0$

pour $t = T_1$ $\quad \eta_{oT_1} = \frac{-j_o l}{2g}$ etc...

Le graphique de la page précédente donne le mouvement de l'eau en fonction du temps au point $x = o$.

Nous voyons qu'un maximum se produit pour $t = \frac{T_1}{2}$ ce qui est confirmé par l'expression :

$$\eta_{ot} = \frac{-4 j_o l}{\pi^2 g} \sum_{k\ imp.} \cos \frac{k\pi ct}{l}$$ où nous voyons que le 1er maximum se produit dans l'onde fondamentale pour $\frac{\pi ct}{l} = \pi$ soit $t = \frac{l}{c} = \frac{T_1}{2}$

A cet extremum dans l'onde fondamentale correspondent d'ailleurs des extrema dans toutes les harmoniques ($k > 1$) puisque la longueur d'onde fondamentale est un multiple k d'une onde harmonique et que k est impair.

12) Variation de u en fonction de x.

$$\frac{\delta u^2}{\delta x^2} = \frac{4 j_0}{c l} \sum_{k\ imp.} \sin \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi ct}{l}$$

$$\sum \sin \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = -\frac{1}{2}\left[\sum \cos\left(\frac{k\pi ct}{l} + \frac{k\pi x}{l}\right) - \sum \cos\left(\frac{k\pi ct}{l} - \frac{k\pi c}{l}\right)\right]$$

u varie linéairement avec x lorsque les 2 termes du 2e membre sont nuls, ce qui a lieu pour $t = \frac{nl}{2c}$ où $n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$

La formule $u_{xt} = \frac{-4 j_0 l}{c\pi^2} \sum_{k\ imp} \left[\frac{\sin \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}}{k^2}\right]$

indique que u est nul pour $x = 0$ et pour $x = l$ et que $\sin \frac{k\pi x}{l}$ atteint son maximum pour $x = \frac{l}{2}$.

Aux instants intermédiaires le mouvement $u = f(x)$ n'est pas linéaire.

13) Variation de u en fonction du temps au point x.

u varie linéairement avec t lorsque $x = 0, \frac{l}{2}, l$.

Aux points intermédiaires le mouvement $u = f(t)$ n'est pas linéaire. Etudions le point $x = \frac{l}{2}$.

$$u_{\frac{l}{2}t} = \frac{-4 j_0 l}{c\pi^2} \sum_{k\ imp.} i_k \frac{\sin \frac{k\pi ct}{l}}{k^2} \qquad \text{avec } i_k = (-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\sum_{k\ imp.} \frac{\sin k\gamma}{k^2} = \frac{\pi\gamma}{4} \quad \text{pour } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc } u_{\frac{l}{2}}t = -j_0 t \quad \text{pour } 0 < t < \frac{T_1}{4}$$

donc $u_{\frac{l}{2}}$ varie linéairement avec t.

pour $t = 0$ $\quad u = 0$

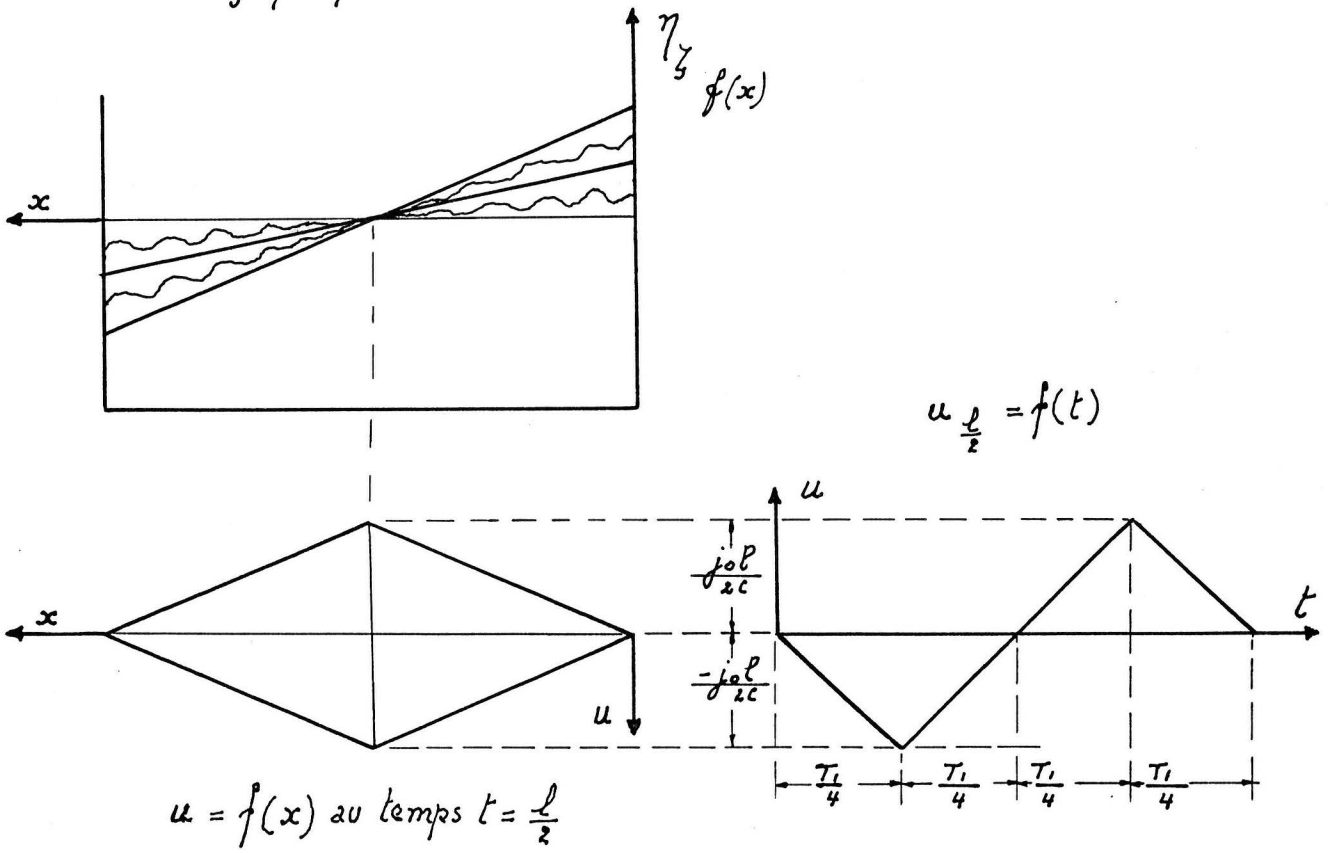
" $t = \frac{T_1}{4}$; $\quad u = \frac{-j_0 l}{2c}$

" $t = \frac{T_1}{2}$ $\quad u = 0$

" $t = \frac{3T_1}{4}$ $\quad u = \frac{j_0 l}{2c}$

" $t = T_1$ $\quad u = 0$

d'où les graphiques :



$u = f(x)$ au temps $t = \frac{l}{2}$

14/ Etude des mouvements créés d'après les lois établies ci-devant.

Pour fixer les idées, considérons le cas du sas de Ronquières, partant du repos à l'aval et remontant la pente avec une accélération constante $j_0 = 1 \frac{cm.}{sec.^2}$ qui s'annule brusquement lorsque le sas a acquis une vitesse de $1 \frac{m}{sec.}$ ($\simeq 3.6 \frac{Km}{H.}$)

$l = 90$ m. $\quad h_0 = 3$ m. $\quad c = \sqrt{g h_0} = 5.42 \frac{m}{sec.}$

la période de l'onde fondamentale vaut $T_1 = \frac{2l}{c} = 33.3$ sec.

Pour atteindre la vitesse de 100 cm/sec. il faut un temps T. donné par $v = jT$ $T = \frac{100}{1} = 100$ secondes (soit 3 périodes d'onde fondamentale.)

le chemin parcouru pendant ce temps est de :

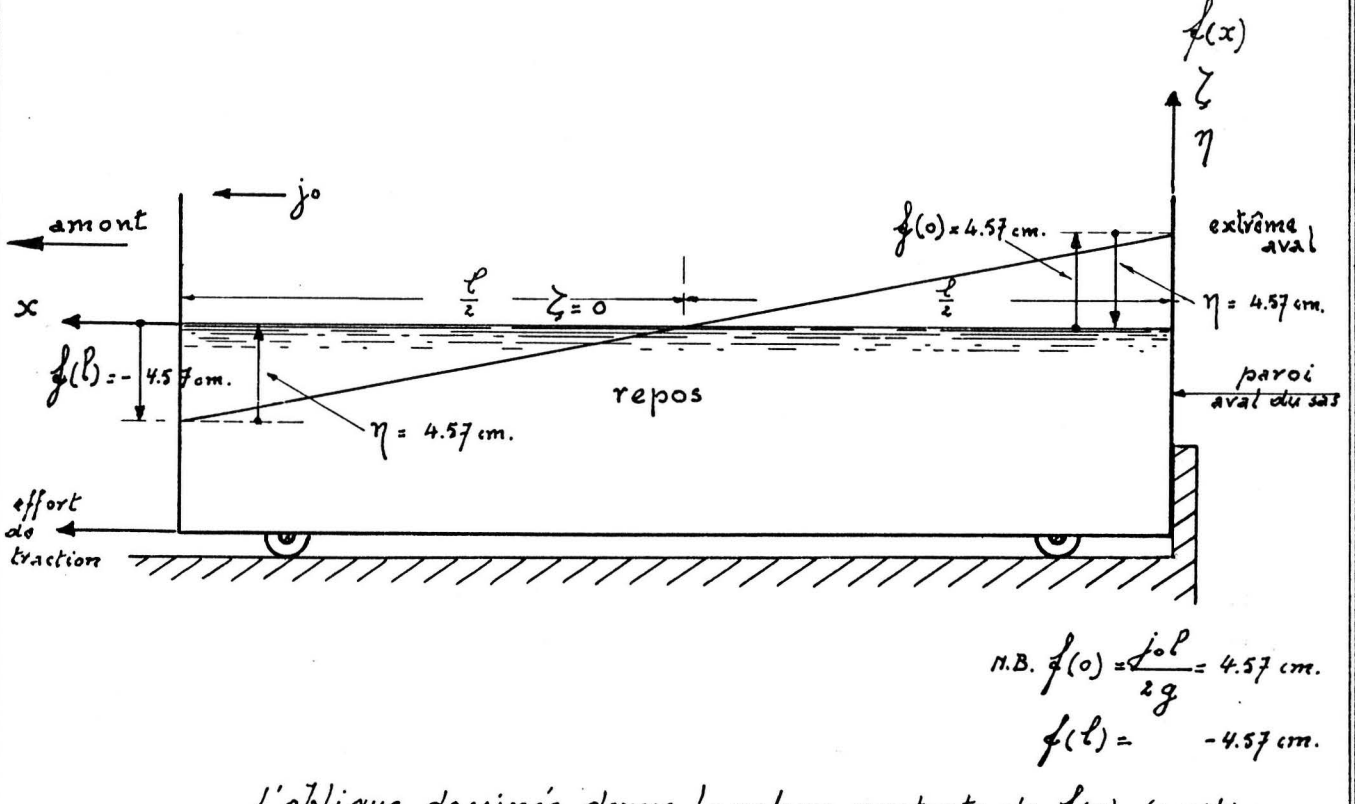
$$L = \frac{jT^2}{2} = jT \times \frac{T}{2} = v \times \frac{T}{2} = 100 \times \frac{100}{2} = 5000 \text{ cm.} = 50 \text{ m.}$$

a) au départ $t = 0$ plan d'eau horizontal $\zeta = 0$

vitesse nulle entre tranches $u = 0$

$$f(x) = \frac{j_0}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\eta_{xt} = -f(x)$$



N.B. $f(0) = \frac{j_0 l}{2g} = 4.57$ cm.

$f(l) = -4.57$ cm.

L'oblique dessinée donne la valeur constante de $f(x)$ (positive à l'aval, négative à l'amont.)

et des valeurs extrêmes pour η (+max. à l'amont ; -max. à l'aval.)

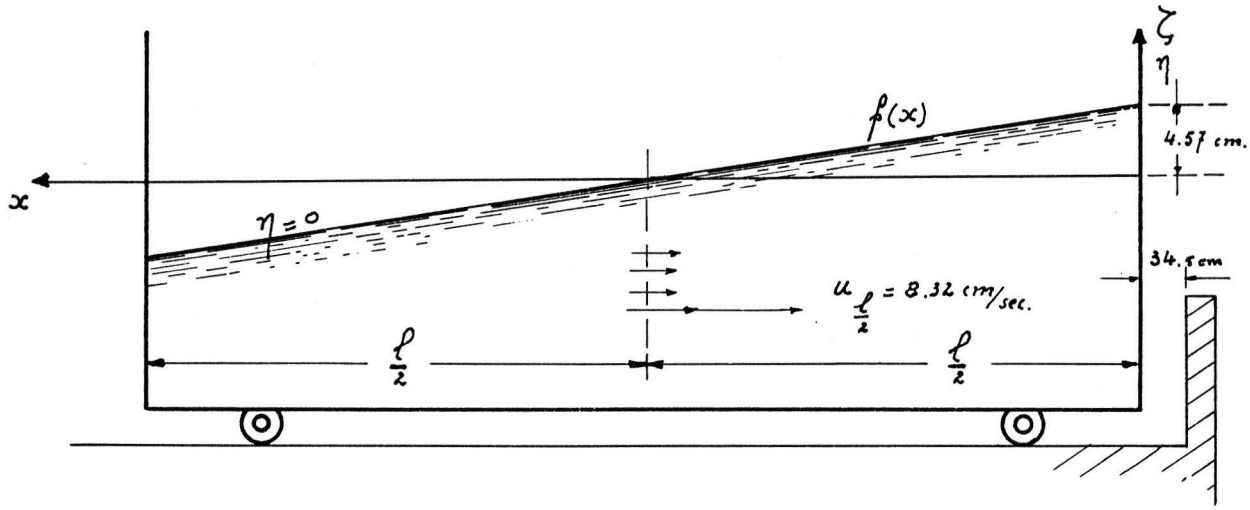
b/ <u>après un temps $\frac{T_1}{4} = \frac{33.3}{4} = 8.3$ secondes.</u>

plan d'eau en position moyenne d'équilibre relatif

$\eta = 0$ $\quad \zeta = f(x)$ $\quad u_{\frac{\ell}{2}} = \frac{-j_0 \ell}{2c} = \frac{-0.01 \times 90}{2 \times 5.42}$

$= -0.0832$ m/sec.

$= -8.32$ cm./sec.



après 8.3 secondes, le sas a parcouru un chemin :

$$L = \frac{j t^2}{2} = \frac{1 \times \overline{8.3}^2}{2} = 34.5 \text{ cm.}$$

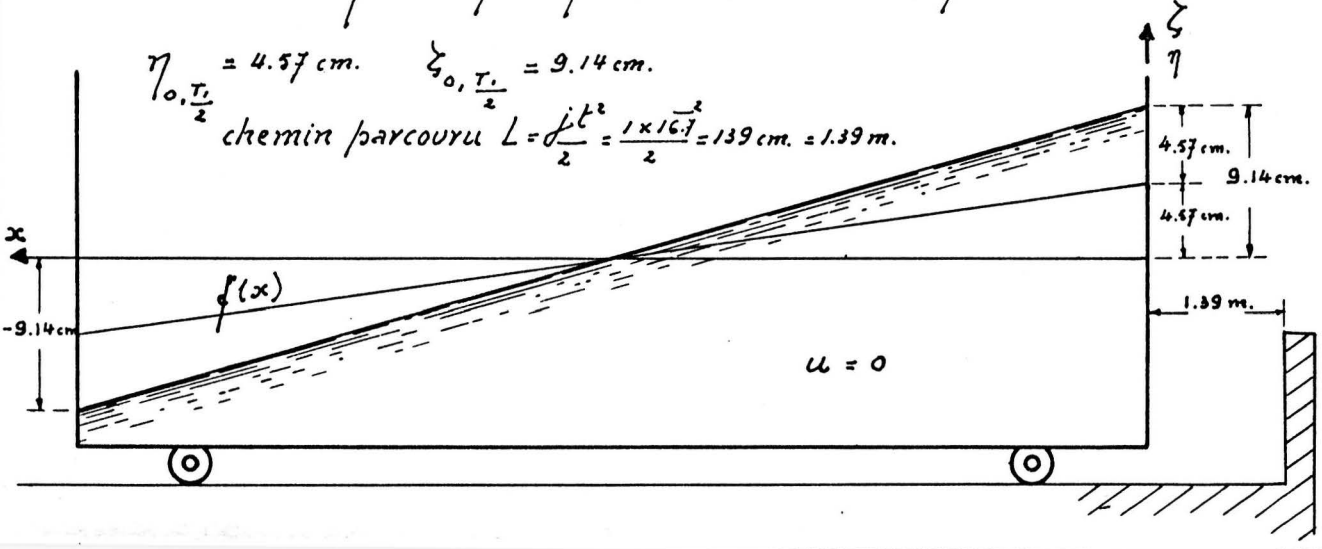
c/ <u>après un temps $\frac{T_1}{2} = 16.7$ secondes.</u>

plan d'eau en position extrême supérieure à l'aval.

η = max. positif à l'aval. $\quad u = 0$ partout

$\eta_{0,\frac{T_1}{2}} = 4.57$ cm. $\quad \zeta_{0,\frac{T_1}{2}} = 9.14$ cm.

chemin parcouru $L = \frac{j t^2}{2} = \frac{1 \times \overline{16.7}^2}{2} = 139$ cm. $= 1.39$ m.



d/ <u>après un temps $\frac{3T_1}{4}$ = 25 secondes.</u>

plan d'eau en position moyenne d'équilibre relatif.

$\eta = 0$ $\quad \zeta = f(x)$ $\quad u_{\frac{l}{2}} = +0.0832$ m/sec.

$= +8.32$ cm/sec.

même figure comme pour b/ mais $\overleftarrow{u_{\frac{l}{2}}} = 8.32$ cm/sec. (inversé)

chemin parcouru $= L = \frac{jt^2}{2} = \frac{1 \times \overline{25}^2}{2} = 312.5$ cm. $= 3.125$ m.

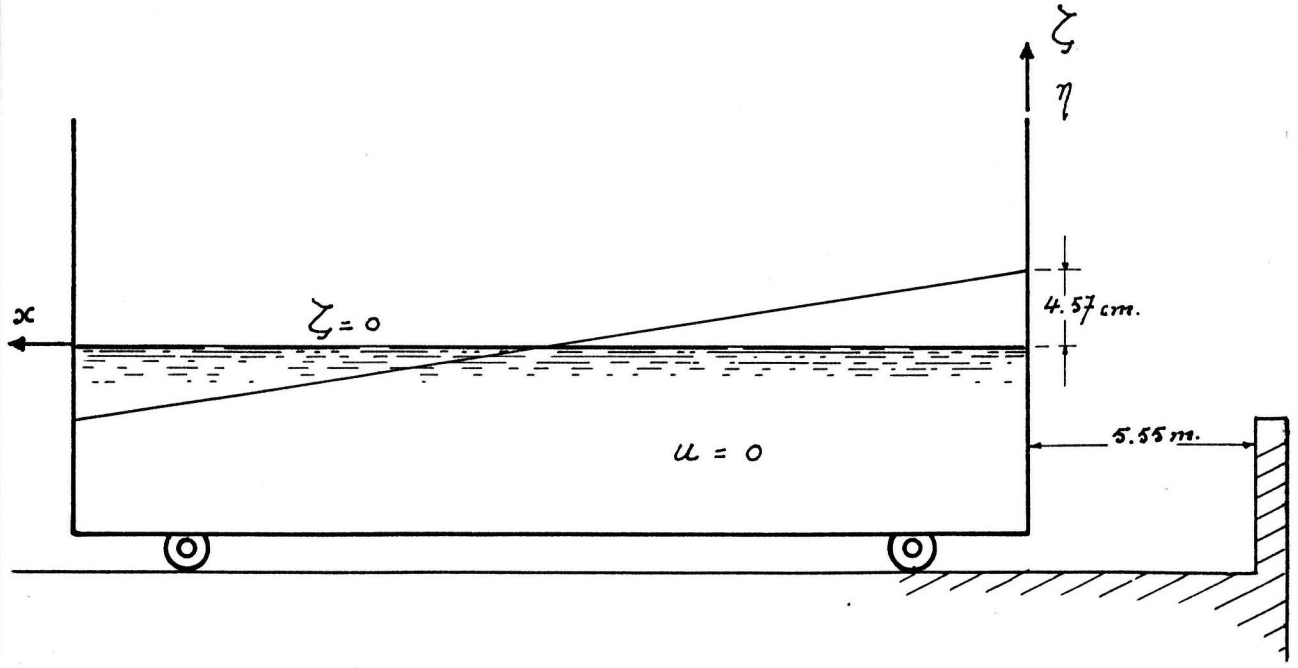
e/ <u>après un temps T_1 = 33.3 secondes.</u>

plan d'eau horizontal $\zeta = 0$

vitesse nulle entre tranches ($u = 0$)

$\eta_x = -f(x)$ $\quad \eta_0 = -4.57$ cm.

chemin parcouru $= L = \frac{jt^2}{2} = \frac{1 \times \overline{33.3}^2}{2} = 555$ cm. $= 5.55$ m.



15/ <u>Conclusions.</u>

A/ Le mouvement est périodique. Il est linéaire, soit dans

l'espace $[f(x)]$ soit dans le temps $f(t)$

pour : $\begin{cases} x = 0 & \frac{l}{2} & l \\ t = 0 & \frac{T_1}{4} \quad \frac{T_1}{2} \quad \frac{3T_1}{4} & T_1 \end{cases}$

B) Pour chaque phase $-j_o = C.^{st} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$

- il y a une oscillation d'amplitude 2η autour d'un plan d'eau moyen $f(x)$. ‖ Le plan d'eau dépend de j_o ; L'amplitude dépend du plan d'eau initial de la phase.

1) pour $-j_o > 0$: Le plan moyen $f(x)$ est incliné avec son point haut à l'amont, tel que $tg\,\beta = \frac{-j_o}{g}$.

l'amplitude 2η est conditionnée par la position du plan d'eau au commencement de la phase.

Cette position initiale agit comme une énergie potentielle initiale, qui périodiquement est convertie entièrement en énergie cinétique pour redevenir potentielle avec signe inversé, puis entièrement cinétique, puis potentielle initiale et ainsi de suite.

2) pour $-j_o = 0$: le plan moyen est horizontal.

l'amplitude 2η est conditionnée par la position du plan d'eau au commencement de la phase.

(énergie potentielle → énergie cinétique → potentielle inverse, cinétique etc...)

3) pour $-j_o < 0$: le plan moyen est incliné avec son point haut à l'aval, tel que $tg\,\beta = \frac{+j_o}{g}$

N.B. même remarque pour l'amplitude 2η comme pour les 2 cas précédents.

C) Deux phases identiques en ce qui concerne $-j_o$, se succédant après un interralle occupé par d'autre phases, ne sont pas identiques en ce qui concerne les dénivellations produites. On conçoit qu'une succession systématique de phases peut annuler ou cumuler les amplitudes.

Le cas le plus défavorable (η max) se produit pour la succession :

$-j_o = 0$ $\quad -j_o > 0$ $\quad -j_o = 0$ $\quad -j_o < 0$ $\quad -j_o = 0$ $\quad -j_o > 0$ etc...

Considérons les dénivellations au point $x = 0$.

soient f_n la valeur de la fonction $f(x)$ au cours de la phase n.

t_{ni} = l'instant initial de la phase n.

t_{nf} = " final " " " n.

n° de phase n	nombre de demi-périodes	instant	$[-j_o]_n$	f_n	ζ	[demi-amplitude]	η	Maxima des valeurs absolues. ζ	Maxima des valeurs absolues. η
0	quelconque	$t_{oi} < 0$ $t_{of} = t_{o_1} = 0$	0	0	0 0	0	0 0	0	0
1	impair	$t_{1i} = t_{01}$ $t_{1f} = t_{12}$	$J_1 > 0$	α	0 2α	$-\alpha$	$-\alpha$ $+\alpha$	2α	α
2	pair	$t_{2i} = t_{12}$ $t_{2f} = t_{23}$	0	0	2α 2α	2α	2α 2α	2α	2α
3	impair	$t_{3i} = t_{23}$ $t_{3f} = t_{34}$	$J_3 = -J_1$	$-\alpha$	2α -4α	3α	3α -3α	4α	3α
4	pair	$t_{4i} = t_{34}$ $t_{4f} = t_{45}$	0	0	-4α -4α	-4α	-4α -4α	4α	4α
5	impair	$t_{5i} = t_{45}$ $t_{5f} = t_{56}$	$J_5 = J_1$	α	-4α 6α	-5α	-5α 5α	6α	5α

Les formules de récurrence sont les suivantes :

$$\phi_0 = \zeta_{0i} = \eta_{0i} = 0$$

$$\zeta_{ni} = \zeta_{n-1,f}$$

$$\eta_{ni} = \zeta_{ni} - \phi_n$$

$\eta_{nf} = \eta_{ni}$ pour un nombre pair de demi-périodes

$-\eta_{ni}$ " " " impair " " " .

$$\zeta_{nf} = \eta_{nf} + \phi_n$$

$$[\text{demi-amplitude}]_n = \zeta_{n-1,f} - \phi_n .$$

D/ Voyons si l'hypothèse de départ :

h_o = petit par rapport à L_k est vérifié (L_k = long.r d'onde longitud.le)

pour $k = 1$ (onde fondamentale) $h_o = 3$ m.

$$\frac{\pi L_1}{\ell} = 2\pi \qquad L_1 = 2\ell = 2 \times 90^{m.} = 180 \text{ m.}$$

$$\frac{h_o}{L_1} = \frac{3}{180} = 0.01667 \quad \text{est petit}$$

pour $k = 9$ $\quad \frac{h_o}{L_9} = 9 \times 0.01667 = 0.15$ n'est plus petit

donc l'hypothèse de départ n'est pas suffisamment plausible, et il faut reprendre l'étude en ne supposant plus que le mouvement se fait par tranches verticales.

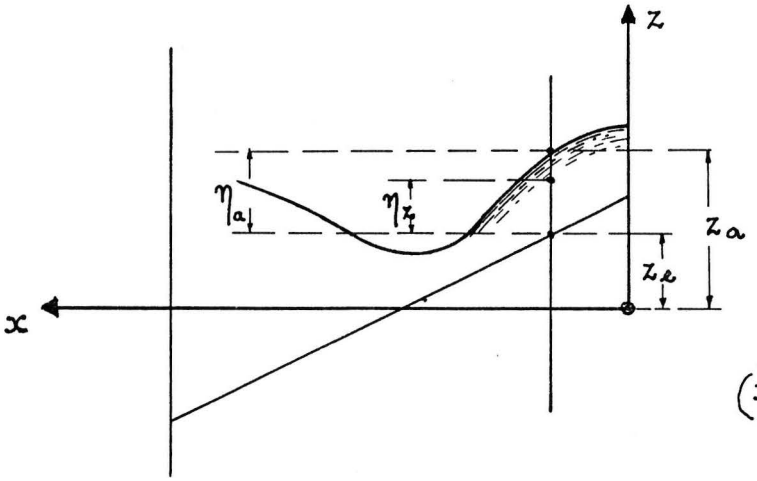
§3. Les seiches à vide en eaux profondes.

Hypothèses:

a) dans une même tranche verticale, les pressions ne sont plus réparties suivant une loi hydrostatique.

b) ζ est négligeable devant h_0 en ce qui concerne les pressions créées.

Notations.



$(x\,z)$ = un point quelconque de la masse liquide.

$(x\,z_a)$ = un point de la surface libre, avec $p = p_a$ = pression atmosphérique.

$(x\,z_e)$ = un point du plan d'équilibre relatif.

1) Equations du mouvement pour un point de volume dx dy dz.

suivant x .... $dm\left(j_0 + \frac{\partial v_x}{\partial t}\right) = -(\partial_x p)\,dy\,dz$.

comme $g\,dm = \rho\,dy\,dx\,dz$

nous obtenons $$\boxed{\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho j_0 = \frac{-\partial p}{\partial x}\,g} \qquad (1)$$

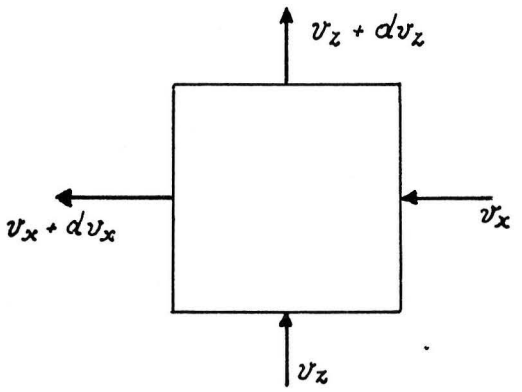
suivant z .... $dm\left(g + \frac{dv_z}{dt}\right) = -(d_z p)\,dx\,dy$.

d'où : $g + \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}g$ et

nous obtenons $\boxed{\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}g}$ (2)

suivant y .... nous admettons $v_y = 0$ (mouvement parallèle au plan xz)

2/ Equation de continuité.



suivant x = eau qui sort = $dy\,dz\,dv_x$

suivant z = " " " = $dx\,dy\,dv_z$

la somme étant nulle.

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0} \qquad (3)$$

3/ Potentiel des vitesses.

Essayons une fonction $\varphi(xzt)$ telle que :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad v_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \Delta\varphi = 0$$

4/ Transformation des équations du mouvement en fonction du potentiel des vitesses.

(1)' $g\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} - \rho f_o$

$$gp = -\rho\int\frac{\partial v_x}{\partial t}dx - \rho\int f_o\,dx + A(zt)$$

constante d'intégration indépendante de x

$$gp = -\rho \int_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} dx - \rho j_o x + A(zt)$$

$$(1)'' \quad gp = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho j_o x + A(zt)$$

$$(2)' \quad g \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g - \rho \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

$$gp = -\rho g \int dz - \rho \int \frac{\partial v_z}{\partial t} dz + B(xt)$$

constante d'intégration indépendante de z.

$$(2)'' \quad gp = -\rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B(xt)$$

$$(1)'' - (2)'' \quad -\rho j_o x + A(zt) + \rho g z - B(xt) \equiv 0$$

d'où : $A(zt) = -\rho g z + f(t)$.

$B(xt) = -\rho j_o x + f(t)$.

$$\boxed{gp = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho j_o x - \rho g z + f(t)}$$

5/ Equation de la surface d'équilibre relatif.

Supposons que par le choix des conditions initiales ou par amortissement à la longue de tout remou, l'on soit parvenu à un état permanent d'équilibre.

En ce cas $\varphi(xzt) =$ constant en tout point.

en plus, aux points $(x z_e)$ nous avons alors :

$gp_a = -\rho j_o x - \rho g z_e + f(t)$, équation linéaire en $(x z_e)$.

A cause du volume d'eau constant, il faut que pour $x = \frac{l}{2}$, $z_e = 0$

donc $gp_a = -\rho j_o \frac{l}{2} + f(t)$.

$$\boxed{f(t) = p_a + \rho j_o \frac{l}{2} = \text{cste}.}$$

l'équation du plan d'équilibre est : $\begin{cases} \text{voir (1) pour } v_x = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho \dfrac{z_e}{\frac{l}{2} - x} \end{cases}$

$$\boxed{z_e = \frac{j_o}{g}\left(\frac{l}{2} - x\right)}$$

et l'expression de p devient :

$$g\,(p_z - p_a) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\rho\,(z - z_e)$$

avec $z - z_e = \eta$ on obtient :

$$\boxed{g(p_z - p_a) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\rho\eta_z} \qquad (8)$$

6) <u>Equation différentielle de la surface libre.</u>

$$(8') \qquad 0 = -\rho \frac{d\varphi}{dt} - g\rho\eta_a$$

$$\boxed{\eta_a = -\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}} \qquad (9) \text{ condition de Poisson.}$$

v_z au point $(x\, z_a) = \dfrac{\partial \eta_a}{\partial t}$ et aussi $= \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$= \frac{-1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0} \qquad (10)$$

valable seulement pour $z = z_a$.

7) Equation différentielle du mouvement vertical à la surface horizontale vraie.

Dérivant (8) par rapport à t.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-g}{\rho}\frac{\partial (p_{ox} - p_a)}{\partial t} = -\frac{g}{\rho}\frac{\partial p_{ox}}{\partial t}$$

où p_o = pression en un point x de la surface horizontale vraie

$(z = 0)$

Par hypothèse b) le § 3 néglige $\frac{\partial p_{ox}}{\partial t}$ pour pouvoir appliquer la condition de Poisson à la surface horizontale vraie au lieu de l'appliquer pour la surface libre où elle est rigoureusement exacte.

Ici nous pouvons faire une comparaison entre les hypothèses du § 2 et celles du § 3.

au § 2. on suppose : a) $\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ $\begin{cases} v_z = \text{indépendant de } t \\ j_z = 0 \end{cases}$

b) v_x = indépendant de z

c) $\frac{\partial p_o}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \neq 0$

au § 3. on suppose : a) $\frac{\partial p_o}{\partial t} = 0$ p_o = indépendant de t

b) $\frac{\partial v_z}{\partial t}$ généralement $\neq 0$

c) v_x = généralement variable, aussi avec z.

Dans une tranche verticale et dans le sens vertical, une dénivel-

lation par rapport au plan d'équilibre relatif (remous) modifie en réalité et le régime des pressions (énergie potentielle) et le régime des vitesses (énergie cinétique). Le § 2 néglige les modifications d'énergie cinétique dans le sens vertical.

Le § 3 néglige les modifications d'énergie potentielle dans le sens vertical.

La réalité est entre les deux : il y a partage.

Les 2 hypothèses se rejoignent cependant pour certains cas limites (voir 12) a) ci-apres.)

8) Solutions particulières de $\varphi = \varphi(x\,z\,t)$

Il faut répondre aux équations différentielles suivantes:

a) l'équation de continuité $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$

b) près de la surface mouillée du bac il faut que la vitesse normale à la paroi soit nulle,

$$\text{donc} \quad v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } x = 0 \quad \text{et pour } x = \ell.$$

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour } z = -h_0.$$

c) la condition de Poisson.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{pour } z = 0$$

pour répondre à a) nous pouvons poser :

$$\varphi(x\,z\,t) = A\,ch[\pi(h_0 + z)]\cos \pi x \cdot \psi(t).$$

pour répondre à c)

$$A\,ch[r(h_0+z)]\cos rx\,\psi_t'' + gAr\,sh[r(h_0+z)]\cos rx\,\psi(t)=0$$

pour $z=0$

$$A\,ch\,rh_0\cos rx\,\psi_t'' + gAr\,sh\,rh_0\cos rx\,\psi(t)=0$$

$$\psi_t'' + gr\,th(rh_0)\,\psi(t)=0$$

d'où $\psi(t)=\sin\omega t$.

donc, les expressions suivantes peuvent être des solutions particulières :

$$\boxed{\varphi(xzt)=A\,ch[r(h_0+z)]\cos rx\,\sin\omega t}$$

Précisons les coefficients par les conditions posées.

a) l'équation de continuité est toujours satisfaite et n'apporte pas de précision supplémentaire.

b) au droit de la surface mouillée.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-rA\,ch[r(h_0+z)]\sin rx\,\sin\omega t=0 \qquad \text{pour } x=\begin{cases}0\\ \ell\end{cases}$$

pour $x=0$: condition satisfaite

pour $x=\ell$: il faut $r\ell=k\times\pi$ $\quad k=$ entier

$$\boxed{r=\frac{k\pi}{\ell}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=rA\,sh[r(h_0+z)]\cos rx\,\sin\omega t=0 \quad \text{pour } z=-h_0$$

vérifié pour $h_0+z=0$

c) la condition de Poisson.

$$-\omega^2 A\,ch[r(h_0+z)]\cos rx\,\sin\omega t + gAr\,sh[r(h_0+z)]\cos rx\,\sin\omega t=0$$

pour $z=0$

$$-\omega^2 ch(rh_o) + gr\,sh(rh_o) = 0$$

d'où $$th(rh_o) = \frac{\omega^2}{gr}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{gr\ th(rh_o)} = f(k)}$$

9/ Solution générale pour φ.

$$\varphi = \Sigma_{k\ ent.s}\left[A_k\, ch\left\{\frac{k\pi}{\ell}(h_o+z)\right\}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\ \sin\left\{t\sqrt{\frac{gk\pi}{\ell}\,th\left(\frac{k\pi h_o}{\ell}\right)}\right\}\right]$$

$$= \Sigma_{k\ entiers}\left[A_k\, ch\left\{\frac{k\pi}{\ell}(h_o+z)\right\}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\ \sin\frac{k\pi ct}{\ell}\sqrt{\frac{th\left(\frac{k\pi h_o}{\ell}\right)}{\frac{k\pi h_o}{\ell}}}\right]$$

$$\boxed{\varphi = \Sigma_{k\ entiers}\left[A_k\, ch\left\{\frac{k\pi}{\ell}(h_o+z)\right\}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\ \sin B_k t\right.}$$

$$\text{avec } c^2 = gh_o \qquad \text{et avec } B_k = \frac{k\pi c}{\ell}\sqrt{\frac{th\ \frac{k\pi h_o}{\ell}}{\frac{k\pi h_o}{\ell}}}$$

10/ Expression de η_a (surface libre)

$$\eta_a = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{g}\Sigma_{k\ ent.s}\left[B_k A_k\, ch\left\{\frac{k\pi}{\ell}(h_o+z_a)\right\}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos B_k t\right]$$

conformément à la simplification convenue en 7/ $\frac{\partial p_o}{\partial t} = 0$

nous négligeons z_a devant h_o

d'où $$\boxed{\eta_a \cong -\frac{1}{g}\Sigma_{k\ ent.s}\left[B_k A_k\, ch\left\{\frac{k\pi h_o}{\ell}\right\}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\cos B_k t\right.}$$

11/ Calcul des coefficients $A_{0/k}$

si nous posons $-\frac{1}{g} B_k A_k ch\left\{\frac{k\pi h_o}{\ell}\right\} = \frac{c}{g} A_k$ nous obtenons :

$$\eta_a = \frac{c}{g} \Sigma_{k\ ent.s} \left[A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos B_k t \right]$$

au temps $t = 0$ cela donne :

$$\eta_a = \frac{c}{g} \Sigma_{k\ ent.s} \left[A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \right] = z_a - z_e \quad \text{au temps } t=0$$

$$= 0 - z_e$$

$$= \frac{-j_o}{g} \left(\frac{\ell}{2} - x \right).$$

équation identique à celle du 9 du § 2.

Le raisonnement développé sous a/, b/ et c/ du 9 du § 2 est applicable ici et donne :

$$\eta_a = \frac{c}{g} \Sigma_{k\ imp.} \left[A_k \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos B_k t \right]$$

Le raisonnement développé sous e/ du 9 du § 2 est également applicable et donne :

$$A_k = \frac{-4 j_o \ell}{c \pi^2 k^2} \quad \frac{m}{sec.} \qquad \text{d'où} \quad A_k = \frac{4 j_o \ell}{B_k \pi^2 k^2 ch\left\{\frac{k\pi h_o}{\ell}\right\}}$$

$$\eta_a = \frac{-4 j_o \ell}{g \pi^2} \Sigma_{k\ imp.} \left[\frac{\cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos B_k t}{k^2} \right]$$

avec $B_k = \frac{k\pi c}{\ell} \sqrt{\frac{th\left(\frac{k\pi h_o}{\ell}\right)}{\frac{k\pi h_o}{\ell}}}$; $c^2 = g h_o$

pour $t = 0$ et $x = \ell$ nous obtenons $\eta_a = \frac{j_0 \ell}{2g} = -z_e$

pour $t = 0$ et $x = 0$ nous obtenons $\eta_a = \frac{-j_0 \ell}{2g} = -z_e$

ce qui est évident, puisque nous sommes partis de ces valeurs pour le développement en série de Fourrier.

12) Comparaison des expressions η_a en eaux superficielles et en eaux profondes.

Les deux expressions peuvent être écrites sous la forme commune :

$$\eta_a = \frac{-4 j_0 \ell}{\pi^2 g} \sum_{k\ \text{imp.}} \left[\frac{\cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \gamma_k \frac{k\pi ct}{\ell}}{k^2} \right]$$

avec $\gamma_k = 1$ en eaux superficielles

et

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{th\left(\frac{k\pi k_0}{\ell}\right)}{\frac{k\pi k_0}{\ell}}} \quad \text{en eaux profondes}$$

a) Les hypothèses de base des § 2 et 3 se rejoignent pour $k_0 \to 0$

il faut donc que $\lim_{k_0 \to 0} \gamma_k = 1$

ce qui est réalisé.

b) pour $k_0 > 0$ $\gamma_k < 1$

en plus $\gamma_1 \neq \gamma_3 \neq \gamma_5$ etc...

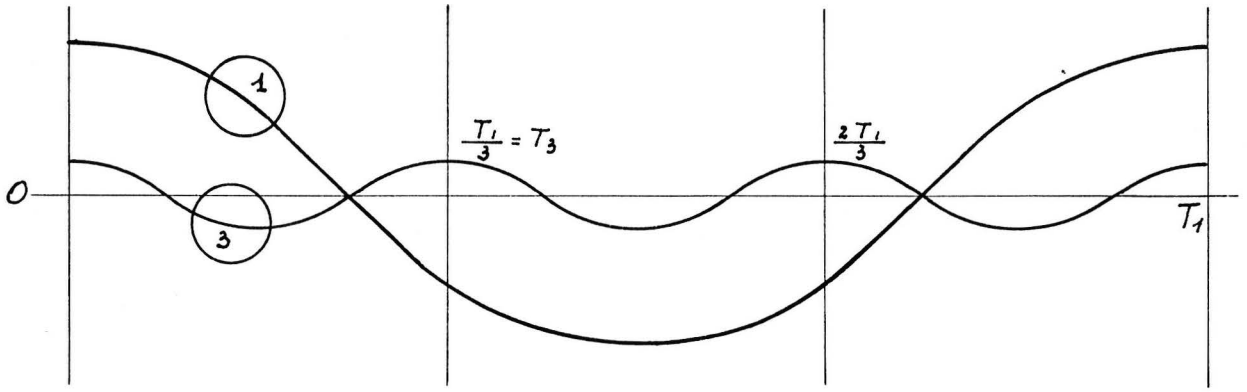
en eaux superficielles, l'onde fondamentale avait une période

$$T_1 = \frac{2\ell}{c}$$

La 1ère harmonique avait une période $T_3 = \frac{2l}{3c}$

La 2de " " " " $T_5 = \frac{2l}{5c}$ etc...

donc T_1 était un multiple commun de T_3 T_5 etc..



Au temps T_1 η avait la même valeur comme au temps 0 ; il en était de même aux instants $n T_1$ avec n = entier. Donc le mouvement était périodique.

En eaux profondes, l'onde fondamentale a une période

$$T_1 = \frac{2l}{c\gamma_1}$$

La 1ère harmonique a une période $T_3 = \frac{2l}{3\gamma_3}$ etc.

où T_1 n'est plus un multiple de T_3.

Pour $t = 0$, tous les cosinus sont encore maximum, mais lorsque l'onde fondamentale repasse par sa valeur maximum, il n'en est plus de même pour les harmoniques ; donc le maximum n'est plus jamais atteint et le mouvement n'est plus périodique.

c) pour $h_0 > 0$

(cfr page suivante)

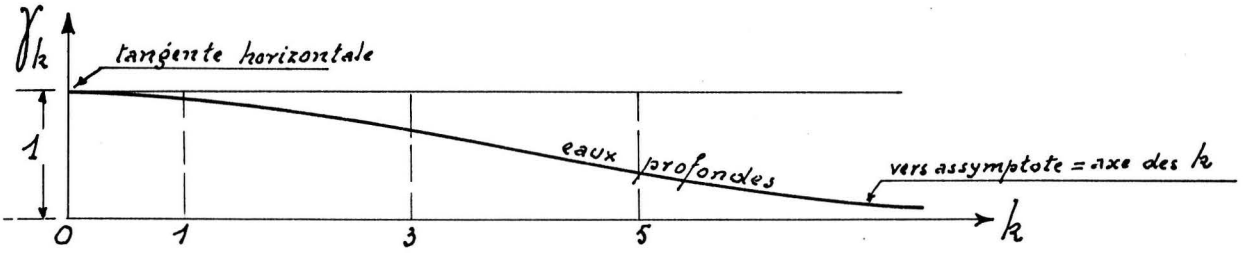
($h_0 > 0$) Voyons la variation de γ_k avec k.

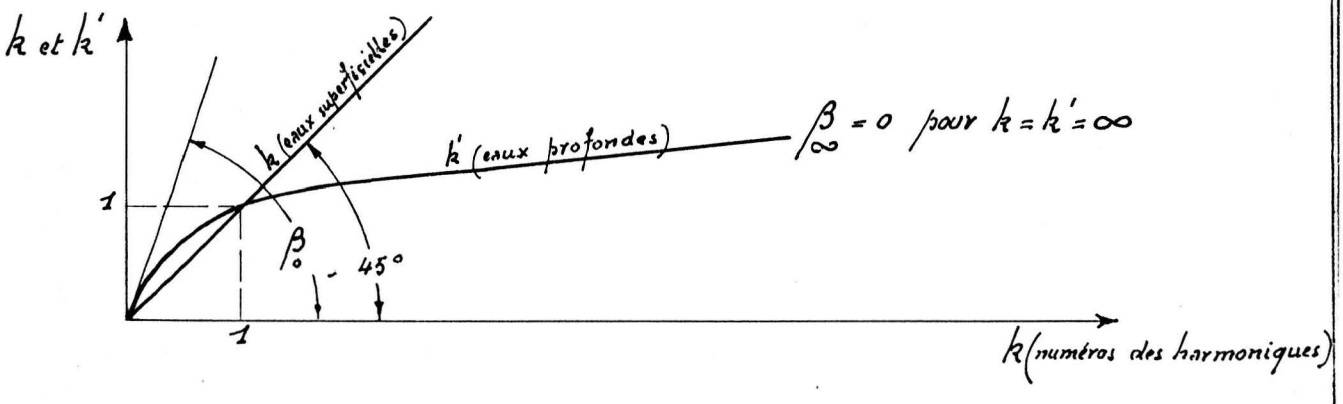
soit $\frac{\pi h_0}{\ell} = \alpha$

$$\gamma_k = \sqrt{\frac{th(k\alpha)}{k\alpha}} \quad \begin{cases} \text{pour } k=0 & \gamma_0 = 1 \quad \text{tangente horizontale} \\ \text{pour } k=1 & \gamma_0 = \sqrt{\frac{th\,\alpha}{\alpha}} < 1 \\ \text{pour } k=\infty & \gamma_\infty = \sqrt{\frac{1}{k\alpha}} = 0 \quad \text{assymptote horizont.} \end{cases}$$

$$\frac{T_1}{T_k} = k' = \sqrt{\frac{k\,th\,k\alpha}{th\,\alpha}} \quad \begin{cases} \text{pour } k=0 & k' = k\sqrt{\frac{\alpha}{th\,\alpha}} = 0 \quad \beta_0 = \text{arc.tg}\sqrt{\frac{\alpha}{th\,\alpha}} > 1 \\ \text{pour } k=1 & k' = 1 \\ \text{pour } k=\infty & k'_\infty = \sqrt{\frac{k}{th\,\alpha}} = \infty \quad \beta_\infty = 0 \end{cases}$$

$$\frac{k'}{k} = \frac{\gamma_k}{\gamma_1} = \sqrt{\frac{th\,k\alpha}{k\,th\,\alpha}} \quad \begin{cases} \text{pour } k=0 & \left(\frac{k'}{k}\right)_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{tg\,\alpha}} \\ \text{pour } k=1 & \left(\frac{k'}{k}\right)_0 = 1 \\ \text{pour } k=\infty & \left(\frac{k'}{k}\right)_\infty = \sqrt{\frac{1}{k\,th\,\alpha}} = 0 \end{cases}$$





$$tg\,\beta_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{th\,\alpha}} > 1 \qquad \beta_0 > 45°$$

Tout se passe comme si l'harmonique de rang k (eaux superficielles) était remplacée (en eaux profondes) par une harmonique de rang k' où k' n'est plus entier et est plus petit que k ; donc k' croit beaucoup moins vite que k surtout pour les grandes valeurs de k.

Ce n'est qu'aux environs de $k=0$ que $k' > k$ mais la zône $0 < k < 1$ n'est pas utilisée pour $\sum_{k\ impairs}$.

Déjà avant $k = 1$ (où $k' = k$) k' croit moins vite que k.

Si d'une part les périodes T_k sont plus grandes pour les harmoniques en eaux profondes, (donc plus proches de la période T_1 de l'onde fondamentale) d'autre part, ce n'est qu'en $t = 0$ que leur interférence produit une somme maximum. A tout autre instant (p.ex. T_1) les cosinus $B_k t$ n'atteignent plus simultanément leur maximum, les k' n'étant plus des nombres entiers.

Pour certaines harmoniques, la partie décimale de k' est même telle que les cosinus ont le signe contraire de celui de l'onde fondamentale.

d) Quelques valeurs chiffrées pour Ronquières.

Le tableau B page 20 de la note de Mr Van den Dungen donne : (pour $\ell = 85$ m. $h_0 = 4.20$ m. et $f_0 = 1$ cm./sec.²) successivement :

en 1ère colonne le n° d'ordre k des harmoniques.

en 2e colonne $\omega = \frac{k\,c\,\pi}{\ell} = k\frac{\sqrt{9.81 \times 4.2 \times \pi}}{85}$ pour eaux superficielles.

cfr. § 2 5 b) ci-devant

$$\omega = 0.2375\ k : \frac{1}{sec.}$$

en 3me colonne :

$$\omega_k = B_k = k\,\frac{c\pi}{\ell}\sqrt{\frac{th\ k\alpha}{k\alpha}} = \omega\sqrt{\frac{th\ k\alpha}{k\alpha}}$$

avec $\frac{\pi k_0}{\ell} = \frac{\pi \times 4.2}{85} = 0.1554$

p.ex. pour $k = 1$

$$\sqrt{\frac{th\ 0.1554}{0.1554}} = \sqrt{\frac{0.1541}{0.1554}} = \sqrt{0.2358} : \frac{1}{sec.}\ etc.$$

en 4me colonne : la différence des 2 colonnes précédentes.

(il y a des erreurs de frappe pour $k = 3$ et $k = 5$)

en 5me colonne : les $\cos \omega_k T$ en eaux profondes

$T = T_1$ des eaux superficielles

$$= \frac{2\ell}{c} = \frac{2 \times 85}{\sqrt{9.81 \times 4.2}} = 26.5\ sec.$$

par exemple pour $k = 1$:

$$\cos(\omega_1 T) = \cos(0.2358 \times 26.5)^{rad.} = \cos(6.25\ rad.)$$

$$= \cos\left(\frac{6.25}{2\pi} \times 360\right) = \cos 359° = \cos 1° = 0.999$$

en 6me colonne $\cos 2\omega_k T$ pour montrer ce que deviennent les $\cos(B_k t)$ après un temps $2T_1$ des eaux superficielles.

par exemple pour $k = 1$

$$\cos(2\omega_1 T) = \cos 714° = \cos 2° = 0.996$$

En eaux superficielles tous les nombres des deux dernières colonnes seraient = 1.

– Remarquons les divergences et même les valeurs négatives.

Rappelons nous que les $\cos(\omega_k t)$ ou $\cos(B_k t)$ sont à multiplier par $\frac{\cos \frac{k\pi x}{\ell}}{k^2}$ dont p.ex pour $x=0$ le numérateur est constamment $= +1$ mais dont le dénominateur croit très vite avec k de façon à ce que les harmoniques de rang élevé ont moins d'influence.

- Si les 2 dernières colonnes du tableau B de la page 20 de la note de M.r Van den Dungen montrent une réduction sensible de η par rapport à l'instant initial $t=0$ où tous les cosinus sont égaux à 1, nous ne pouvons toutefois pas parler d'un amortissement, car il est possible qu'après n périodes T_1 on obtienne une configuration des parties décimales des k' telles que : $\cos(n\,\omega_k\,T_1)$ soit plus défavorable que les configurations des 2 colonnes précitées.

Cependant, on peut affirmer que la configuration initiale ne sera plus jamais atteinte.

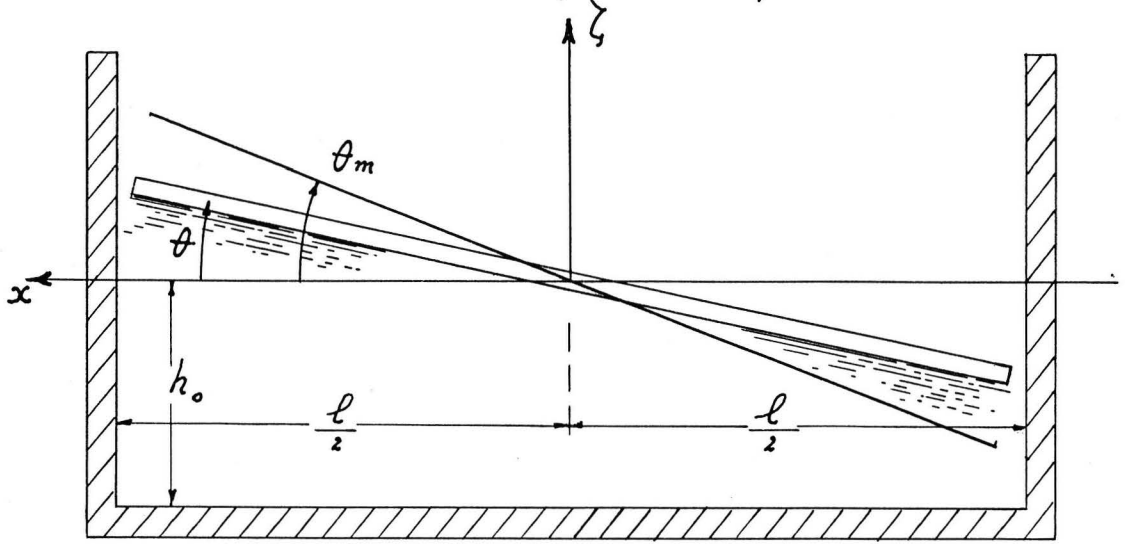
13) CONCLUSIONS.

a) nous nous plaçons dans une hypothèse défavorable quand nous négligeons l'effet de la grande profondeur d'eau.

En vue de simplifier les calculs ultérieurs, nous supposons donc toujours être en eaux superficielles.

b) une autre hypothèse défavorable a été admise tacitement du fait que nous n'avons pas tenu compte des déperditions d'énergie par frottement, qui elle, amortit réellement les oscillations.

4me § Les seiches dans un plan rigide flottant.



Hypothèses :

1) eaux superficielles

ζ est petit par rapport à h_0

h_0 " " " " " ℓ

2) le sas est en repos $j_0 = 0$

3) le plan rigide flottant occupe toute la surface du sas et n'a aucun contact avec les parois.

4) par l'une ou l'autre cause, le plan rigide flottant est animé d'un mouvement d'oscillation périodique simple autour de l'axe y perpendiculaire au plan du papier pour la figure ci-dessus. (tangage)

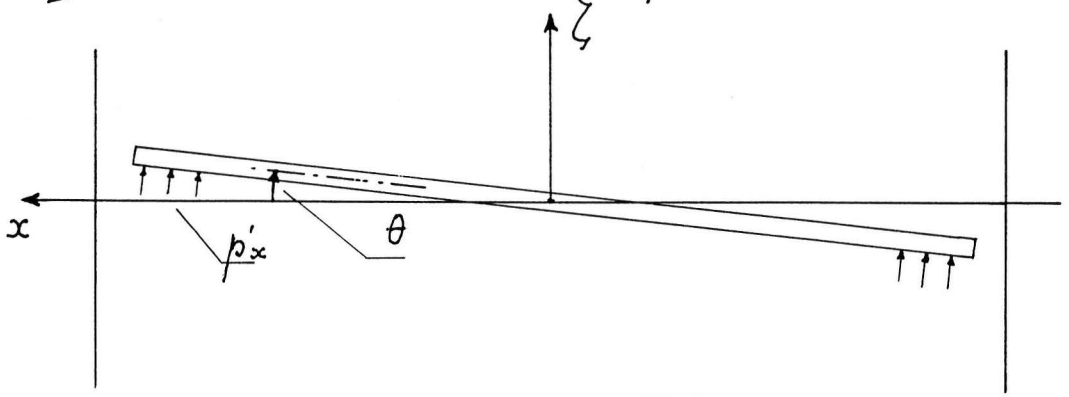
Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le plan rigide flottant occupe une position horizontale et qu'à l'instant t il fasse l'angle θ avec cette position horizontale.

Soit θ_m la valeur maximum de θ.

Au temps t au droit du point x du plan rigide flottant, nous avons : $\theta_{t,x} = \theta_m \sin \omega t$.

et $\zeta_{t,x} = \theta_m \, x \sin \omega t$.

1) Sollicitation du plan rigide flottant.



Soit P le poids du plan rigide, supposé centré.

a) équation des composantes verticales (b = largeur du sas)

(a) $$P = b \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} p' dx$$

b) mouvement de tangage.

équation du mouvement de rotation.

$$J_o \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = b \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} p'_x \, dx$$

(b) où $$J_o = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} x^2 \, dm$$ du plan rigide flottant

($dm = \frac{P dx}{g \ell}$ si P est uniformement reparti sur la longueur ℓ.)

2) Equation de continuité dans une tranche verticale liquide.

[voir § 2 1)] $$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0} \qquad (1)$$

3) Equation du mouvement suivant x au temps t.

$$(\Sigma mj)_x = (\Sigma F_e)_x$$

$$(\Sigma mj)_x = m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dx\, b h_0 \rho}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Sigma (F_e)_x = -\rho b h_0 d_x \zeta - d_x p'_x b h_0$$

↓ voir § 2 ci-devant.

d'où $$\boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - g \frac{\partial p'_x}{\partial x}} \qquad (2)$$

4) Expression explicite de u.

$$(1)' \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h_0} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{-1}{h_0} \theta_m x \omega \cos \omega t$$

d'où $$u = \frac{-\theta_m \omega \cos \omega t}{h_0} \frac{x^2}{2} + C.$$

pour $x = \pm \frac{\ell}{2}$ $\qquad u = 0$

$$C = \frac{\theta_m \omega}{h_0} \cos \omega t \frac{\ell^2}{8}$$

$$\boxed{u = \frac{\omega \theta_m}{2 h_0} \left[\frac{\ell^2}{4} - x^2\right] \cos \omega t}$$

5) Expression explicite de p'

$$(2)' \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'_x}{\rho}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= + \frac{\omega^2 \theta_m}{2gh_0}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) \sin \omega t - \theta_m \sin \omega t$$

d'où

$$\frac{p'_x}{\rho} = \frac{\omega^2 \theta_m}{2gh_0} \sin \omega t \left[\frac{l^2 x}{4} - \frac{x^3}{3}\right] - x\theta_m \sin \omega t + K .$$

comme la constante K agit sur toute la longueur et qu'une valeur trop forte entraînerait une résultante trop forte, nous déterminons K par la condition (a) ci-devant.

$$P = \rho b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left\{ \frac{\omega^2 \theta_m}{2gh_0} \sin \omega t \left[\frac{l^2 x}{4} - \frac{x^3}{3}\right] - x\theta_m \sin \omega t + K \right\} dx$$

Sous le signe intégral nous trouvons un polynôme rationnel en x avec des limites égales et de signes contraires. Donc seuls les termes à exposant pair interviennent.

$$P = \rho b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} K \, dx = K l b \rho \qquad K = \frac{P}{b l \rho}$$

$$\boxed{p'_x = \rho \theta_m x \sin \omega t \left[\frac{\omega^2}{2gh_0}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{x^2}{3}\right) - 1\right] + \frac{P}{bl}}$$

6) Calcul de ω

Reprenons l'équation (b) du mouvement de tangage.

cfr. page suivante

$$-J_0 \theta_m \omega^2 \sin \omega t$$

$$= b\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left\{ \frac{\omega^2 \theta_m}{2gh_0} \sin \omega t \left(\frac{l^2 x}{4} - \frac{x^3}{3} \right) - x \theta_m \sin \omega t + \frac{P}{b l \rho} \right\} x \, dx$$

Le second membre contient sous le signe intégral un polynôme rationnel en x avec des limites de signes contraires.

Du facteur entre crochets, seuls les termes impairs interviennent.

donc :

$$-J_0 \theta_m \omega^2 \sin \omega t = \frac{\omega^2 \theta_m b\rho}{2gh_0} \sin \omega t \left[\frac{2l^2}{4 \times 3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 - \frac{2}{3 \times 5} \left(\frac{l}{2} \right)^5 \right]$$

$$- b\rho\theta_m \sin \omega t \times \frac{2}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3$$

d'où :

$$\omega^2 = \frac{\frac{b \rho l^3}{12}}{J_0 + \frac{b \rho l^5}{120 g h_0}}$$

soit ω' la pulsation que nous aurions pour $J_0 = 0$

(plan rigide flottant sans masse)

$$\omega'^2 = \frac{10gh}{l^2} = \frac{10 c^2}{l^2} \qquad \omega' = \frac{c}{l} \sqrt{10} \quad \frac{1}{\text{sec.}}$$

cette pulsation est due uniquement à la masse de l'eau.

On peut écrire :

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{l^2}{10 g h_0} + \frac{J_0}{\frac{b \rho l^3}{12}} = \frac{1}{\omega'^2} + \frac{12 J_0}{b \rho l^3}$$

soit $= \frac{1}{\omega'^2} + \frac{1}{\omega''^2}$ en posant $\frac{1}{\omega'^2} = \frac{12 J_o}{b \rho l^3}$

↓ influence de la masse de l'eau ; ↘ influence de la masse du bateau

C'est une formule du genre Dunkerley pour les arbres en rotation (où l'on distingue l'influence de la masse de l'arbre des autres influences.)

7) Vérification de cette interprétation de ω'' (genre Dunkerley)

ω'' dépend-il bien exclusivement du bateau ?

Au lieu de négliger la masse du bateau ($J_o = 0$), négligeons maintenant la masse de l'eau au point de vue dynamique et voyons si nous retrouverons pour ω la valeur ω''.

$$p_{dynam.} = 0 \quad \text{avec} \quad J_o \neq 0$$

En ce cas p'_x = pression hydrostatique sur le bateau $= p_{stat.}$ ζ

$$J_o \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} b \rho \zeta x \, dx$$

$$J_o \theta_m \omega'^2 \sin \omega'' t = b \rho \theta_m \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \sin \omega'' t \, dx = b \rho \theta_m \frac{l^3}{12}$$

$$\text{d'où} \quad \omega''^2 = \frac{b \rho l^3}{12 J_o}$$

ce qui est bien la valeur de ω''^2 établie ci-devant.

8) Comparaison des pulsations obtenues avec $\overleftarrow{j_0}$ en eaux superficielles et avec $\downarrow P$ sans masse.

Soit $\omega_{0,m}$ la pulsation pour le cas $\begin{cases} \overleftarrow{j_0} = 0 \text{ (accélération du sas)} \\ m \neq 0 \text{ (masse du plan rigide flottant)} \end{cases}$

soit $\omega_{j,0}$ la pulsation pour le cas $\begin{cases} j_0 \neq 0 \\ m = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \omega_{0,m} \leq \dfrac{c}{\ell}\sqrt{10} \\ \omega_{j,0}^{\text{fondamental}} = \dfrac{c}{\ell}\pi \end{array}\right\} \text{ or } \quad \pi^2 \cong 9.87 \left(\lessapprox 10\right)$$

$\omega_{j,0}^{\text{fondam.}} = \omega_{j,0}^{\text{total}}$ puisque ce n'est qu'après un nombre entier de fois T_1 que toutes les harmoniques repassent par les mêmes valeurs.

Nous avons donc la succession suivante :

$\begin{cases} \omega_{j,0} \text{ non constant en eaux profondes} & < \dfrac{c}{\ell}\pi \\ \omega_{j,0} \text{ en eaux profondes, au départ } (k'=k) \\ \omega_{j,0} \text{ en eaux superficielles, toujours} \end{cases} \Big\} = \dfrac{c}{\ell}\pi$

ω_{0m} avec sas au repos et plan rigide flottant avec masse en tangage $< \dfrac{c}{\ell}\sqrt{10}$

ω_{0m} idem mais sans masse $= \dfrac{c}{\ell} = \quad (> \dfrac{c}{\ell}\pi)$

Les différences ne sont pas illogiques : il n'y a pas moyen de se figurer un cas limite commun entre ω_{j_0} en eaux superficielles et ω_{0m}.

On peut bien s'imaginer un θ de plan rigide flottant et un $\vec{j_o}$ de sas en mouvement en eaux superficielles tel que :

$$\frac{l}{2}\frac{j_o}{g} = \frac{l}{2}\theta$$

ou $\theta = \frac{j_o}{g}$. Dans ce cas les η_{max} sont égaux, mais on ne peut pas avoir simultanément l'égalité des plans moyens, l'un étant forcément incliné à cause de $\vec{j_o}$ et l'autre étant horizontal.

En plus les pulsations sont différentes, quoique très peu ($\pi^2 \neq 10$) : dans ce cas de $\vec{j_o}$ l'eau peut suivre la loi $\eta_x = f(t)$ qui est linéaire par intermitence, tandis que dans le cas de P l'eau est astreinte à suivre une loi sinusoidale $\eta_x = f(t)$ imposée par P.

Comparons de façon plus détaillée les mouvements de l'eau dans les cas :

a) seiches en eaux superficielles d'un sas en accélération $\vec{j_o}$ et dues à une dénivellation initiale par rapport à la position moyenne du plan d'eau.

b) idem en eaux profondes

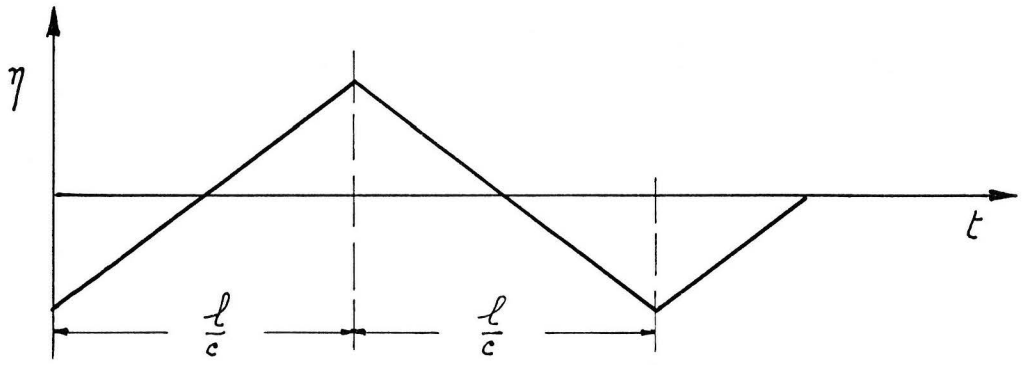
c) sas en repos ($\vec{j_o} = 0$ $\vec{v} = 0$) mais agité par un mouvement de tangage créé par un plan rigide flottant :

$\begin{cases} \text{cas } C_1 & J_o = 0 \text{ plan rigide sans masse} \\ \text{cas } C_2 & J_o \neq 0 \text{ " " ayant une masse.} \end{cases}$

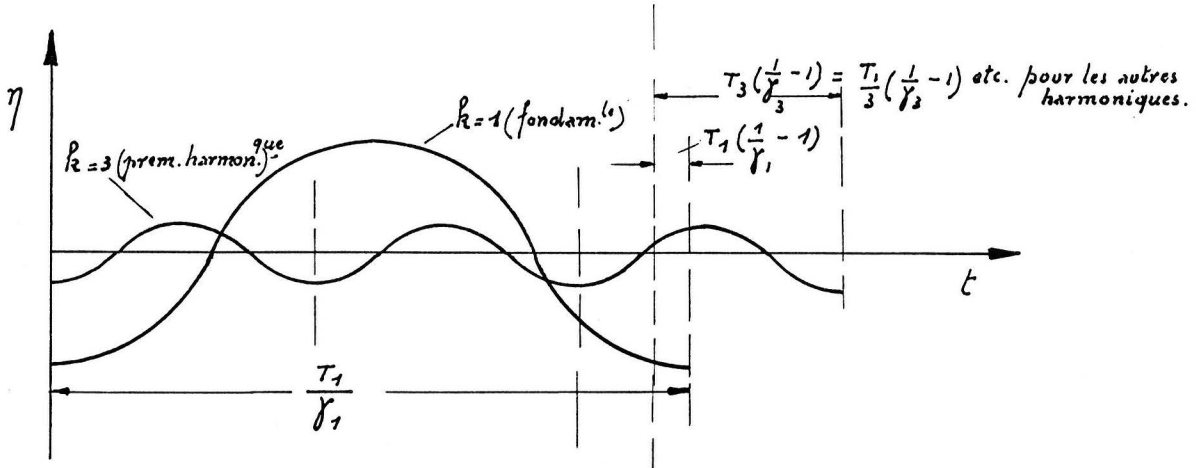
<u>A Au point de vue de la loi $\eta = f(t)$ en un point x donné.</u> (p. ex. $x = 0$)

(voir les cas différents page suivante)

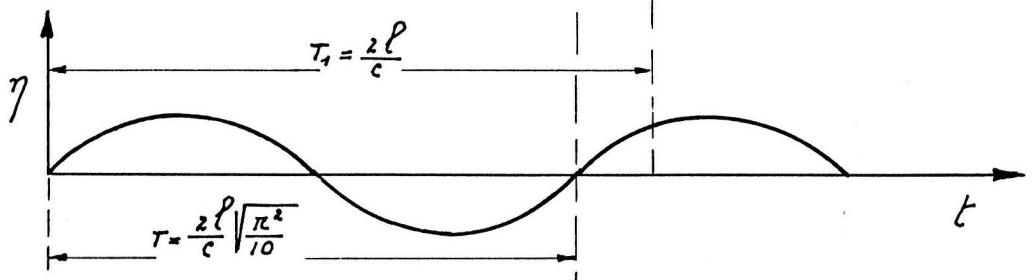
Cas a : { En position extrême :
Loi polygonale périodique.



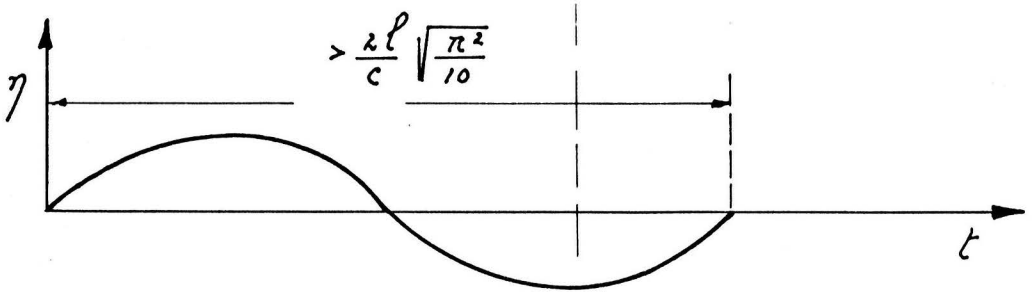
Cas b : Loi sinusoidale complexe non périodique.



Cas C_1 Loi sinusoidale régulière périodique.



Cas C_2 Loi sinusoidale régulière périodique.



B. Au point de vue de la loi $\eta = f(x)$ à l'instant t donné.

Cas a : La surface d'eau est plane à certains instants

Cas b : idem

Cas c : idem (par hypothèse) à tout instant.

C. Au point de vue de la position du plan d'eau moyen.

Cette position est exprimée par la dénivellation par rapport au plan horizontal vrai, notée aux points $x = \ell$. (ou $x' = \frac{\ell}{2}$.)

Cas a : $z_e = \frac{j_0 \ell}{2g}$

Cas b : $z_e = \frac{j_0 \ell}{2g}$

Cas c : $z_e = 0$

D. Au point de vue des maxima η_{max} du mouvement relatif, notés aux points $x = \ell$ (ou $x' = \frac{\ell}{2}$).

Cas a : $\eta_{max} = \frac{j_0 \ell}{2g}$

Cas b : $\eta_{max} = \frac{j_0 \ell}{2g}$ seulement au départ

$< \frac{j_0 \ell}{2g}$ dans la suite

Cas c : $\eta_{max} = \frac{\ell}{2} \theta$

E. Au point de vue de la pulsation ω du mouvement relatif.

Cas a : $\omega = \frac{\pi c}{\ell}$

Cas b: mouvement non périodique : au départ pour $k' = k$ $\omega = \frac{\pi c}{\ell}$

dans la suite $k' = k$ $\omega < \frac{\pi c}{\ell}$

Cas C_1 : $\omega = \omega' = \frac{c\sqrt{10}}{\ell} > \frac{\pi c}{\ell}$

Cas C_2 : $(\omega'' \neq \infty)$ $\omega < \omega'$

F. Au point de vue de l'énergie totale au départ :

Cas a : purement potentielle.

· Position déterminée du plan d'eau différente de la position d'équilibre correspondant à $\overleftarrow{j_o}$ du sas.

Cas b : idem

Cas c : purement cinétique.

Le plan d'eau occupe sa position moyenne pour laquelle $\uparrow j = 0$.

G. Conclusions

Tout se passe donc comme suit :

- Si l'eau n'est pas guidée par une loi périodique imposée, elle suit une loi périodique composée, constituant une pulsation naturelle.

. En eaux profondes, leur masse crée des perturbations et la pulsation naturelle est réduite après le départ.

Si l'eau n'est pas raidie par le plan flottant mais qu'elle ne peut plus suivre librement sa loi naturelle, le plan flottant lui imposant une loi sinusoïdale $\eta = f(t)$ régulatrice ; la pulsation augmente.

– Si en plus le plan flottant est rigide, la raideur agit comme une perturbation et la pulsation diminue.

On pourrait écrire :

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega'^2_{\text{sinusoidal}}} + \frac{1}{\omega''^2_{\text{bateau}}}$$

$$\frac{1}{\omega'^2_{\text{libre}}} = \frac{1}{\omega'^2_{\text{sinusoïd.}}} + \frac{1}{\omega'''^2}$$

où ω''' = pulsation fictive due à l'action régulatrice de la loi sinusoïdale imposée.

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega'^2_{\text{libre}}} + \frac{1}{\omega''^2_{\text{bateau}}} - \frac{1}{\omega'''^2}.$$

9) Justification directe de la formule de Dunkerley pour le cas du plan rigide flottant.

Considérons le système – eau + bateau. –

énergie cinétique totale + énergie potentielle totale = constante.

Considérons le plan horizontal vrai comme plan de repère pour l'énergie potentielle.

Au départ, l'énergie potentielle est nulle (plan d'eau = plan horizontal vrai) et l'énergie cinétique est maximum.

Lorsque l'angle θ_{max} est atteint, l'énergie cinétique est nulle et l'énergie potentielle est maximum.

L'énergie cinétique max. de l'eau est donnée par :

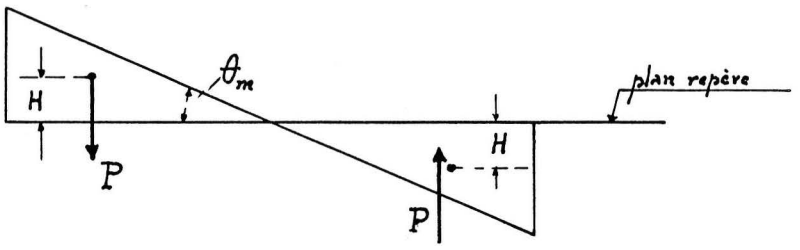
$$T'_m = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (dm)\, u_{x'}^2\, dx' \quad \text{pour } t=0 \quad = \frac{\rho b \omega^2 \theta_m^2 l^5}{240\, g\, h_0}$$

L'énergie cinétique max. du plan rigide est donnée par:

$$T''_m = \frac{1}{2}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (dm)\left[\frac{d(x'\theta)}{dt}\right]^2 dx' \quad \text{pour } t=0$$

$$= \frac{1}{2} J_o \omega^2 \theta_m^2$$

L'énergie potentielle du système (la masse du plan rigide étant remplacée par celle de l'eau déplacée) vaut:



V_m = - Travail de la pesanteur

= 2 PH.

$$= \frac{2 b p \frac{l}{2} \theta_m \frac{l}{2}}{2} H \quad = \frac{b p l^2 \theta_m H}{4}$$

H du centre de gravité du prisme = $\frac{1}{3}\left(\theta_m \frac{l}{2}\right) = \frac{\theta_m l}{6}$

$$V_m = \frac{b p l^3 \theta_m}{24}$$

$$V_t + T'_t + T''_t = \text{c.}^{\text{ste}}$$

$V_m = T'_m + T''_m$ donne:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{l^2}{10 g h_o} + \frac{12 J_o}{b p l^3} = \frac{1}{\omega'^2} + \frac{1}{\omega''^2}$$

les valeurs T'_t et T''_t ont été obtenues à partir du mouvement du système global en fonction de ω global.

Cette façon de procéder ne donne que des valeurs approchées de ω' et ω'' parceque ω global ne parvient pas à s'imposer tout à fait au mouvement des parties constituantes.

En plus ce sont des valeurs péchant par excès. (Théorème de Raleigh)

$$\text{donc } \omega'^2_{réel} < \frac{10\,g h_o}{l^2} \qquad \omega''^2_{réel} < \frac{6\,p\,l^3}{k\,J_o}$$

en entendant par $\omega'_{réel}$ et $\omega''_{réel}$ les pulsations propres des systèmes partiels.

Par contre, à cause du même théorème de Raleigh, ω réel du système global est plus grand que le ω global obtenu en partant de ω' réel et ω'' réel. (pulsations propres des systèmes partiels.)

$$\text{donc } \frac{1}{\omega^2_{réel}} < \frac{1}{\omega'^2_{réel}} + \frac{1}{\omega''^2_{réel}}$$

Donc si K K' et K'' sont des quantités > 1

nous avons :

$$\frac{1}{\omega^2_{réel}} = \frac{1}{K}\left[\frac{K'}{\omega'^2} + \frac{K''}{\omega''^2}\right]$$

où nous voyons que K' et K'' agissent en sens inverse de K, ce qui rend plausible l'approximation de Dunkerley : $K = K' = K'' = 1$

---

§ 5. Les mouvements du bateau non amarré dans le sas.

A. Correction pour la carène.

Hypothèses:

a) Le fond du bateau occupe toute la largeur ℓ du bateau, mais il n'est ni plan ni symétrique de part et d'autre de l'axe y. Toutefois, sa surface est cylindrique avec des génératrices parallèles à l'axe des y (sens b).

b) Eaux superficielles (hypothèse défavorable au point de vue des η)

c) Sas en repos. ($j_0 = 0$)

d) Mouvement d'oscillation imposé au bateau, avec amplitude $2\theta_m$.

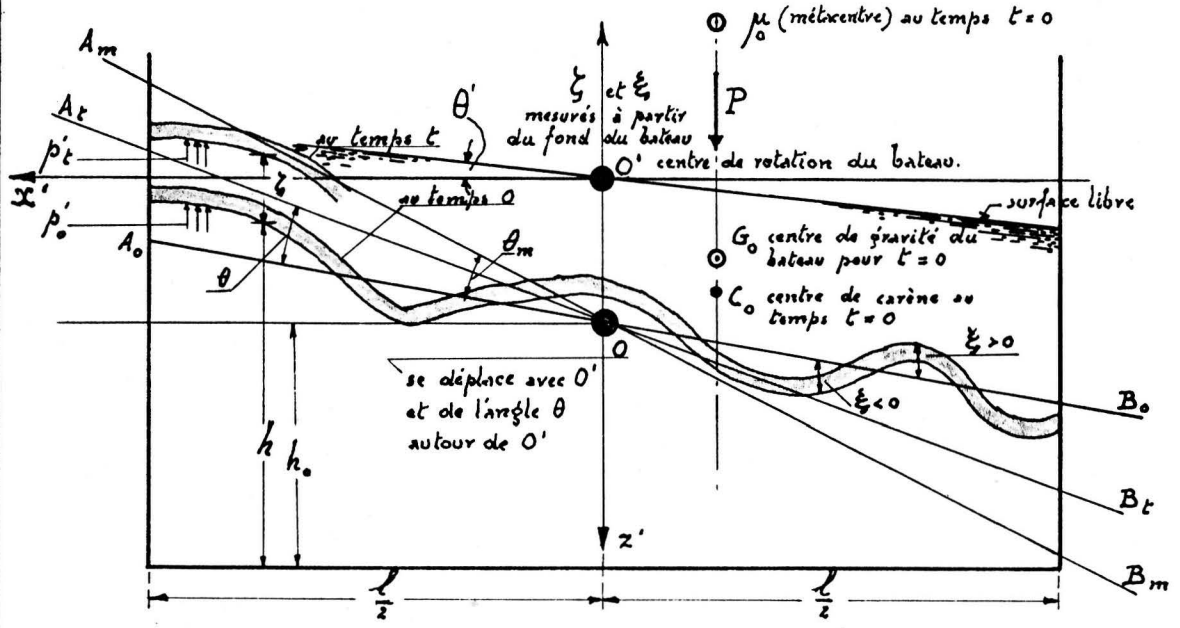
$\zeta = \theta_m x'$ sin ωt. avec θ_m petit et θ_m^2 négligeable.

e) Volume d'eau c^{te} sous la quille mais le bateau peut flotter librement.

1) Equation de continuité dans une tranche verticale liquide.

(voir § 2. 1°)

$$(1)\quad \boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x'} = 0}$$



N.B. $A_o B_o$: droite moyenne du fond du bateau à l'instant o

: telle que les poids p en T./m. répondent aux équations

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p\,\xi\,dx' = 0$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p\,\xi\,x'\,dx' = 0$$

$A_t B_t$: droite moyenne du fond du bateau à l'instant t.

$A_m B_m$: droite " " " " " inclinée au maximum.

2) Equation du mouvement suivant x en temps t.

$$\Sigma (mj)_{x'} = (\Sigma F_e)_{x'}$$

$$\Sigma (mj)_{x'} = m\frac{du}{dt} = \frac{b h_2 p\,dx'}{g}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{b p\,dx'}{g}\frac{\partial (hu)}{\partial t}$$

$$(\Sigma F_e)_{x'} = -p b\,d_{x'}\left(\frac{h_{x'} + \zeta_{x'}}{2}\right) - b\,d_{x'}(h p'_{x'})$$

$$(2) \quad \boxed{\rho\frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\rho g h\,\partial (h+\zeta)}{\partial x'} + g h\frac{\partial p'}{\partial x'} = 0}$$

3) Equation du tangage (dérivée par rapport à t) du moment de la quantité du mouvement autour d'un point O.

établissons la formule :

$$(3) \quad \boxed{J_G\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mathcal{M}_{o'}(\Sigma P, \underset{\text{en G}}{\Sigma mj}, \Sigma p' \text{ et } \Sigma s'}$$

où J_G est le moment d'inertie polaire pris par rapport à G_o et non par rapport à O'. $J_G = \int \rho'^2 dm$. avec ρ' = distance à G_o de la masse dm.

Pour établir la formule (3) considérons les diverses forces et accélérations sollicitant le bateau.

a) les mj tangentiels du mouvement du bateau autour du point O' considéré comme un point fixe du bateau.

Ces $(mj)_t$ donnent une résultante verticale $\downarrow (mj)_{tz'}$

$$= \int \omega^2 \theta x' dm = \omega^2 \theta \int x' dm = \omega^2 \theta x'_{G_o} \frac{P}{g} .$$

en négligeant la variation de x'_G proportionnelle à θ_m et donnant lieu à un terme en θ_m^2 négligeable.

De même la résultante horizontale $\overleftarrow{(mj)}_{tx'}$

$$= -\int \omega^2 \theta z' dm = -\omega^2 \theta z'_{G_o} \frac{P}{g}$$

Prenons le moment résultant de ces $(mj)_t$ autour de O'.

$$\mathcal{M}_{O'}(mj)_t = \mathcal{M}_G(mj)_t + \omega^2 \theta \frac{P}{g} r_G^2 = \omega^2 \theta \left[-J_G - \frac{P}{g} r_G^2 \right]$$

où r_G = distance entre G_o et O'.

Donc la résultante des $(mj)_{tang.}$ peut être considérée comme appliquée au point G_o moyennant un couple $= -\omega^2 \theta J_G$

b) les mj radiaux (forces centrifuges) du mouvement du bateau autour du point O' comme un point fixe du bateau.

Leur résultante passe par O' et est proportionnelle à θ_m^2 donc négligeable.

c) La force de Coriolis due au mouvement de O' du bateau par rapport à O' du sas. (mouvement d'entraînement) alors que le bateau tourne autour de son propre point O'. (mouvement relatif.)

$$F_c = 2\frac{P}{g}\frac{\delta r_G}{\delta t} r_{G_t} = \frac{2P}{g}\frac{\delta r_G}{\delta t} r_G \omega \theta_m \cos \omega t.$$

appliquée en G et perpendiculaire à $\overline{GO'}$, mais comme $\frac{\delta r_G}{\delta t}$ ne contient que des termes en $(\theta_m)^n$ avec $n \geq 1$ (voir plus loin page R 69) la force de Coriolis est négligeable pour le mouvement du tangage. Elle est nulle lorsque O'_{bateau} est fixe.

d) le poids du bateau $P = \int dP$ dont la résultante est appliquée en G.

e) la réaction de l'eau à l'instant t.

Cette réaction passe par le métacentre μ_t du temps t et est perpendiculaire à la surface d'eau libre réelle (ou fictive lorsqu'elle ne peut s'établir.)

$$\mathcal{M}_{O'}(\mathcal{R}_t) = \mathcal{M}_{O'}(\Sigma p' \text{ et } \Sigma s')$$

où $\Sigma p'$ et $\Sigma s'$ sont les poussées d'eau verticales et horizontales, dont la résultante passe par μ_t et par C_t.

Pour le développement de la formule (3) voir pages R 58 et suivantes.

Remarque. Si O' n'est pas fixe, la réaction horizontale due à l'accélération

tangentielle et à la poussée d'eau est transmise en G où elle crée une translation horizontale du bateau avec une accélération donnée par:

$(\overleftarrow{mj})_{x'} = \overleftarrow{mj}_{tx'} - (\mathcal{R}_t)_H$ corrigeant le $\mathcal{M}'_o$ du a) ci-dessus par l'addition au 2ème membre du terme $[-mj_{tx'} + (\mathcal{R}_t)_H] z'_{G_o}$

$$= \omega^2 \theta z'^2_{G_o} \frac{P}{g}\left(1 - \frac{(\mathcal{R}_t)_H}{mj_{tx'}}\right)$$

donc z^2_G est remplacé par $x'^2_{G_o} - z'^2_{G_o} \frac{(\mathcal{R}_t)_H}{mj_{tx'}}$

4) Expression explicite de hu.

$$\zeta = \theta_m x' \sin \omega t$$

$$(1)' \quad \theta_m \omega x' \cos \omega t + \frac{\delta(hu)}{\delta x'} = 0 \qquad \text{d'où } hu + \theta_m \omega (\cos \omega t) \frac{x'^2}{2} + C = 0$$

$u = 0$ pour $x' = \pm \frac{l}{2}$ d'où $C = \frac{l^2}{4}$

$$\text{et } hu = \frac{1}{2} \omega \theta_m \left[\frac{l^2}{4} - x'^2\right] \cos \omega t$$

5) Expression explicite de p'

$$(2)' \quad hu \frac{\delta}{\delta x'}\left[\frac{p'}{\rho} + h + \zeta\right] = \frac{-1}{g} \frac{\delta(hu)}{\delta t} = \frac{+1}{2g} \omega^2 \theta_m \left[\frac{l^2}{4} - x'^2\right] \sin \omega t$$

$$\frac{p'}{\rho} + h + \theta_m x' \sin \omega t = \frac{\omega^2 \theta_m}{2g} \sin \omega t \int_o^{x'} \left(\frac{l^2}{4} - x'^2\right) \frac{dx'}{h} + K(t)$$

posons: $\int_o^{x'} \frac{dx'}{h} = \frac{x'}{h_o} \Omega(x') \qquad \int_o^{x'} \frac{x'^2 dx'}{h} = \frac{x'^3}{3h_o} J(x')$

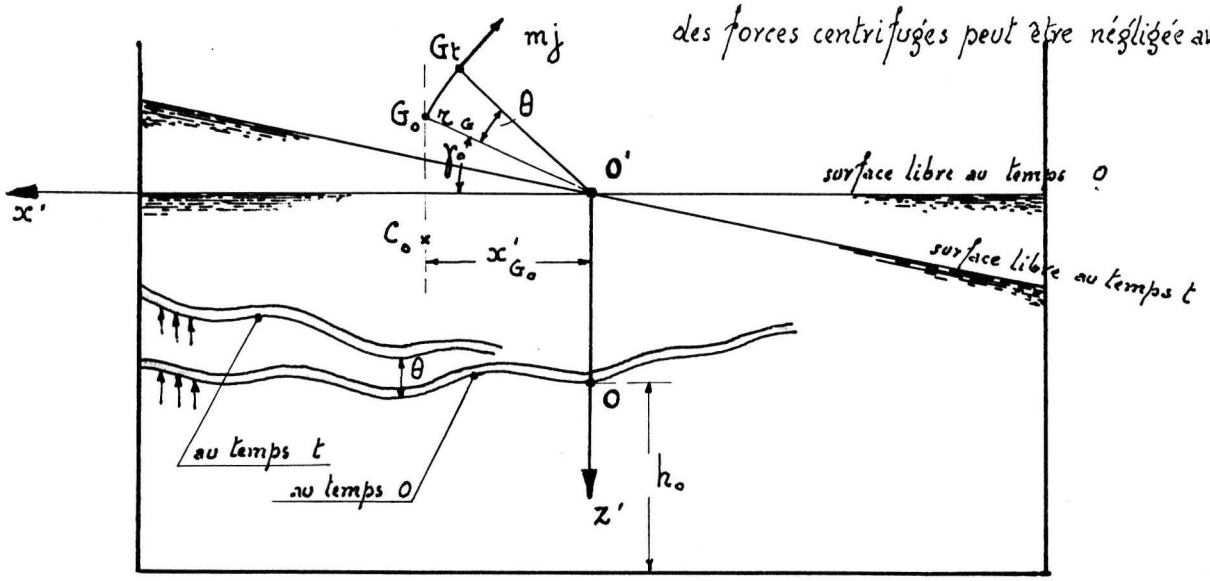
$$p' = -\rho(h + \theta_m x' \sin \omega t) + \frac{\rho \omega^2 \theta_m \sin \omega t}{2gh_o}\left[\frac{l^2}{4} x' \Omega(x') - \frac{x'^3}{3} J(x')\right] + \rho K$$

l'équation des composantes verticales donne:

$$\left[1 - \frac{j \cos(\gamma_o + \theta}{g}\right] P = b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p' dx'$$

où : $j_t = -r_G \theta_m \omega^2 \sin \omega t$ = résultante des j tangentiels

$r_G \cos(\gamma_o + \theta) = x'_{Gt} = x'_{G_o}$ dans les multiplications par θ_m. [La résultante des forces centrifuges peut être négligée avec θ_m^2.]



$$\left[1 + \frac{x'_G \theta_m \omega^2 \sin \omega t}{g}\right] \frac{P}{b} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p' dx'$$

$$= -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h\, dx' + \rho \frac{\omega^2 \theta_m \sin \omega t}{2gh} \left[\frac{l}{4} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' \Omega(x') dx' - \frac{1}{3} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'^3 J(x') dx'\right] + \rho K l.$$

$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h\, dx' = h_o l$ puisque le volume d'eau est constant sous la quille.

$$\rho K = \frac{P}{bl}\left[1 + \frac{x'_{Gt} \theta_m \omega^2 \sin \omega t}{g}\right] + h_o \rho - \rho \frac{\omega^2 \theta_m \sin \omega t}{2gh_o} \frac{l}{4} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' \left[\Omega(x') - \frac{x'^2 J(x')}{3l}\right] dx'$$

Remarquons que $x'_{G_o} - x'_{G_t} (\cong r \theta_m \sin \gamma_o \sin \omega t)$ est petit avec θ_m donc dans l'équation ci-dessus, x'_{G_t} peut être remplacé par x_{G_o}.

$$p' = p'_o + K'_{x'} \sin \omega t.$$

$$\text{où } p'_o = \frac{P}{b\ell} + \rho(h_o - h)$$

$$K'_{x'} = -\rho \theta_m x' + \frac{\omega^2 \theta_m}{g}\left\{\frac{P x'_{G_o}}{b\ell} + \frac{P}{2h_o}\left(\frac{\ell^2}{4}x'\Omega(x') - \frac{x'^3}{3}J(x') - \frac{1}{\ell}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}}\left[\frac{\ell^2}{4}x'\Omega(x') - \frac{x'^3 J(x')}{3}\right]\right)dx'\right\}$$

le terme $\frac{P}{b\ell}$ donne la pression du point de repère.

le terme $h_o - h$ donne une pression de position de hauteur au repos.

le terme $\rho x' \theta_m \sin \omega t$ donne une pression de position de hauteur correspondant à la pression hydrostatique due à ζ.

le terme en ω^2 donne la partie hydrodynamique. se composant d'une partie constante de translation et d'une partie variable de rotation.

6) Equation du tangage.

Ecrivons l'équation du moment autour de O' des quantités de mouvement du seul système « bateau ».

$$\Sigma \mathcal{M}_{o'}(mv) - \Sigma \mathcal{M}_{o'}(mv_o) = \Sigma \int_{t_o}^{t} \mathcal{M}_{o'}(F_e\, dt).$$

dérivant par rapport à t.

$$\frac{\delta}{\delta t}\Sigma \mathcal{M}_{o'}(mv) = \Sigma \mathcal{M}_{o'}(F_e)$$

Chaque partie de masse dm a une quantité de mouvement $= v\,dm = \frac{d(r\theta)}{dt} dm = r\theta_m \omega \cos \omega t\, dm$ qui est dirigée normalement à r.

Ceci produit un moment dans le sens horlogique de :

$$r^2 \theta_m \omega \cos \omega t\, dm.$$

$$\Sigma \mathcal{M}_{o'}(mv) = \theta_m \omega \cos \omega t \int_{\substack{\text{bateau} \\ \text{autour de } O'}} r^2 dm$$

$$= \theta_m \omega \cos \omega t \left[\int_{\substack{\text{bateau} \\ \text{autour de } G_o}} \rho'^2 dm + \frac{P}{g} r_{G_t}^2 \right.$$

$$= \theta_m \omega \cos \omega t \left[J_G + \frac{P}{g} \left(x'^2_{G_t} + z'^2_{G_t} \right) \right]$$

où $J_G = \int_{\text{bateau}} \rho'^2 dm$

ρ' = distance à G_o d'un point du bateau de masse dm.

— O'_{bateau} se déplace de ξ_o ←, sur le plan moyen $\overline{A'_o B'_o}$ et de $\xi'_o \theta$ ↑ vers le haut. (cfr figure page suivante)

$$r_{G_t}^2 = (x'_{G_o} + \xi_o)^2 + (z'_{G_o} - \xi_o \theta)^2 = r_{G_o}^2 + 2 x'_{G_o} \xi_o$$

où $\xi_o = k \theta_m$ (voir page R)

$$\frac{\delta}{\delta t} \Sigma \mathcal{M}_{o'}(mv) = -\theta_m \omega^2 \sin \omega t \left[J_G + \frac{P}{g} r_{G_o}^2 \right] - \underbrace{k \theta_m^2 \omega^2 \frac{P}{g} \sin \omega t}_{\text{négligeable avec } \theta_m^2.}$$

$$= -\theta_m \omega^2 \sin \omega t \, J_G - \theta_m \omega^2 \sin \omega t \frac{P}{g} r_{G_o}^2$$

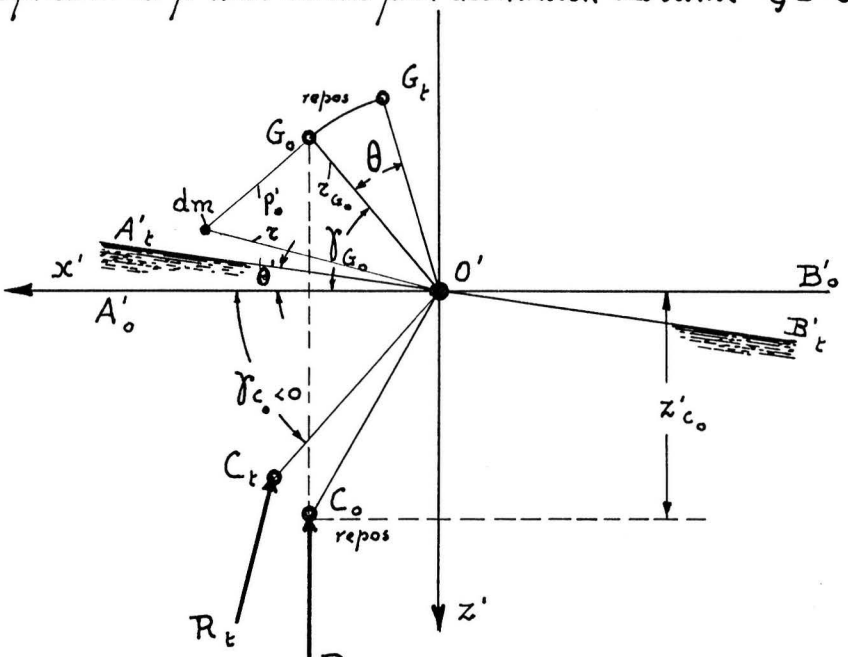
Le 2^d terme du 2^d membre est une force de masse correspondant à la masse $\frac{P}{g}$ appliquée en G_o et tournant autour de O' avec une accélération due au mouvement de rotation. Nous l'envisagaons au $\int J$ de la page R 64. Dès lors $\frac{\delta}{\delta t} \Sigma_{o'}(mv)$ se reduit à $-\theta_m \omega^2 \sin \omega t \, J_G$.

Les forces extérieures (réelles ou de masse) varient avec t, en même temps la position du bateau varie avec t.

Nous séparons ces 2 variations.

α) Supposons que le bateau reste immobile, alors que les forces varient.

Dans l'expression de p' nous devons faire abstraction du terme $-\zeta = -\theta x' = -\theta_m x' \sin \omega t$.



La surface d'eau libre fait un angle θ' avec l'horizontale à cause de l'accélération de l'eau et le centre de carène se déplace.

Soit C_o le centre de carène au temps 0 et C_t ce centre au temps t.

Par la sollicitation dynamique les coordonnées de C varient. Elles sont données par:

$$x'^{\,dyn.}_{C_t} = \frac{b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' p' \, dx'}{P + (mj)_v}$$

$$z'^{\,dyn.}_{C_t} = \frac{b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} z' s' \, dx'}{(mj)_H}$$

où s' est la poussée d'eau horizontale par unité de surface verticale.

En prenant p' de la page R 58 dont nous avons retranché le terme $-\theta_m x' \sin \omega t$, nous obtenons :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' p' dx' = -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h x' dx' + \frac{\omega^2 \theta_m \sin \omega t}{2gh_o} \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(\frac{l^2}{4} x'^2 \Omega - \frac{x'^4}{3} J\right) dx'$$

$$= x'^{dyn}_{c_t} \frac{P}{b} \left[1 + \frac{x'_{G_o} \theta_m \omega^2 \sin \omega t}{g}\right]$$

$$= \frac{x'^{dyn}_{c_t} \frac{P}{b}}{1 - \frac{x'_{G_o} \theta \omega^2}{g}}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h x' dx' = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (h'_o - z') x' dx' = 0 - \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} z' x' dx' = \frac{-P}{b\rho} x'_{c_o} = \frac{-P}{b\rho} x'_{G_o}$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' p' dx' = \frac{P}{b} x'_{G_o} + \frac{\omega^2 \theta_m \sin \omega t \, \rho l^5 \mathcal{H}}{120 gh.}$$

$$= x'^{dyn}_{c_t} \frac{P}{b}$$

où $$\mathcal{H} = \frac{60 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[\frac{l^2 x'^2 \Omega(x')}{4} - \frac{x'^4 J(x')}{3}\right] dx'}{l^5}$$

$$x'^{\,dynam.}_{c_t} = \left[x'_{G_0} + \frac{\mathcal{H}\,\omega^2\theta\, b\rho l^5}{120\, g h_0 P} \right] \left(1 - \frac{x'_{G_0}\,\theta\,\omega^2}{g}\right)$$

$$x'^{\,dyn.}_{c_t} = x'_{G_0}\left(1 - \frac{x'_{G_0}\,\theta\,\omega^2}{g}\right) + \frac{\mathcal{H} R l^2 \omega^2 \theta}{10 g h_0}$$

$$x'^{\,dynam.}_{c_t} = x'_{c_0} + R\theta' \qquad \theta' = \left(\frac{\mathcal{H} l^2 \omega^2}{10 g h_0} - \frac{x'_{G_0}\,\omega^2}{Rg}\right)\theta$$

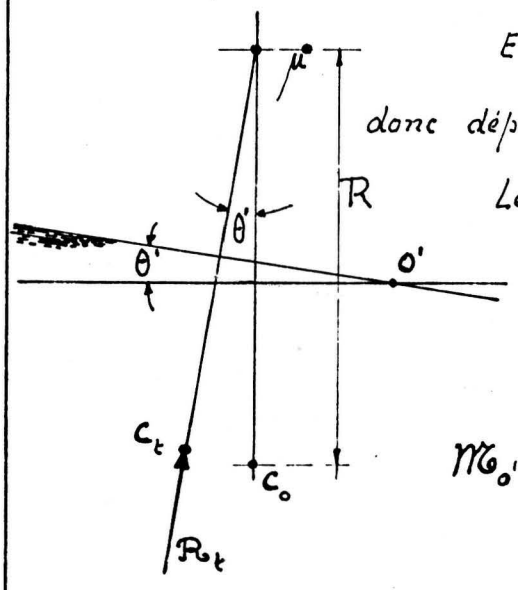
où R = rayon métacentrique $= \dfrac{\rho b l^3}{12 P}$

$R\theta'$ = déplacement de C autour du métacentre μ_0.

De même, puisque $\mu_0 C_0$ est une verticale et que θ' est petit $z'^{\,dyn.}_{c_t} = z'_{c_0}$

Soit $\mathcal{R}_t$ la résultante au temps t des poussées d'eau sur la carène ; $\mathcal{R}_t$ passe par C_t.

Décomposons $\mathcal{R}_t$ au point C_t en ses composantes $(\mathcal{R}_t)_v$ verticale et $(\mathcal{R}_t)_H$ horizontale $= (\mathcal{R}_t)_v\,\theta'$.



Entre les instants 0 et t ces composantes sont donc déplacées de quantités proportionnelles à θ.

Leurs moments par rapport à O' deviennent :

$$\mathcal{M}_{O'} = (\mathcal{R}_t)_v\, x'_{c_t} - (\mathcal{R}_t)_H\, z'_{c_t}$$

$$= (\mathcal{R}_t)_v \left[x'_{c_t} - z'_{c_t}\,\theta' \right]$$

$$\mathcal{M}_{O'} = P\left(1 + \frac{\omega^2\theta\, x'_{G_0}}{g}\right)\left[x'_{c_0}\left(1 - \frac{x'_{G_0}\,\theta\,\omega^2}{g}\right) + \frac{R - z'_{c_0}}{R}\left(\frac{\mathcal{H} R l^2 \omega^2 \theta}{10 g h} (-) - \frac{x'^{\,2}_{G_0}\,\theta\,\omega^2}{g}\right)\right]$$

en négligeant les termes en θ^2 nous obtenons :

$$\mathcal{M}_{o'}(\mathcal{R}_t) = P x'_{G_o} + \frac{P\omega^2\theta}{g}\,\frac{R - z'_{c_o}}{R}\left(\frac{\mathcal{H} R l^2}{10 h_o} - x'^2_{G_o}\right).$$

β) Gardons maintenant les forces invariables, mais tournons lentement le bateau de l'angle θ autour de O', de façon à occuper sa position réelle.

Dans ce mouvement p' n'intervient que pour son terme :

$-\zeta = -x'\theta p = -x' p \theta_m \sin\omega t.$

La lenteur du mouvement correspond à $\omega^2 = 0$

$(\mathcal{R}_t)_V$ et $(\mathcal{R}_t)_H$ ne changent pas de valeur.

Mais le centre de carène se déplace d'abord de θ autour de O' (comme si tout le système eau + bateau + métacentre se déplaçait) puis la carène se déplace de $-\theta$ autour du métacentre μ (parceque l'eau doit refaire le chemin inverse.)

d'où :

x'_{G_t} réel $= (x'_{G_t}$ du mouvement $\alpha) + z'_{c_o}\theta - R\theta.$

z'_{G_t} réel $= (z'_{G_t}$ du mouvement $\alpha)$ + un terme en θ (négligeable du fait qu'il est à multiplier par une force proportionnelle à θ.)

$$M^{\text{réel}}_{o'}(\mathcal{R}_t) = (\mathcal{R}_t)_V\, x'_{G_t\,\text{réel}} - (\mathcal{R}_t)_H\, z'_{G_t\,\text{réel}}.$$

$$= M_{o'}(\mathcal{R}_t) \text{ du mouvement } \alpha + P(z'_{c_o}\theta - R\theta)$$

d'où $\Delta M_{o'} = P\theta(z'_{c_o} - R)$

Le terme $-RP\theta$ est d'ailleurs égal à $-bp\theta\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'dx'$ dû à la variation de p' comme si le plan d'eau se déplaçait en sens inverse par rapport à un bateau immobile.

Le terme $P\theta z'_{c_0}$ est dû au fait que c'est le bateau qui se déplace au lieu du plan d'eau; contrairement à ce qui se passe pour un déplacement d'eau, les points matériels de la quille se déplaçant tous autour de O'.

Jusqu'à présent nous avons cherché les moments de $\mathcal{R}_t$ par rapport à O' après avoir scindé le mouvement en 2 variations.

Cherchons maintenant $M_{o'}$ des forces de masse du bateau. Considérons mj_{tang} (p.R.54) appliquée en G comme une force. Comme elle a quitté le camp des mj créés pour rejoindre celui des forces créantes il faut inverser son signe.

$$\mathcal{M}_{o'} = -P\left(1 - \frac{\omega^2\theta\, x'_{G_o}}{g}\right)x'_{G_t} + P\frac{\omega^2\theta\, z'_{G_o}}{g}\, z'_{G_t}$$

$$= -P\left(1 - \frac{\omega^2\theta\, x'_{G_o}}{g}\right)\left(x'_{G_o} + z'_{G_o}\theta\right) + \frac{P\omega^2\theta\, z'_{G_o}}{g}\left(z'_{G_o} - x'_{G_o}\theta\right)$$

$$= -P\left(x'_{G_o} - z'_{G_o}\theta\right) + \frac{P\omega^2\theta}{g}\left(x'^2_{G_o} + z'^2_{G_o}\right)$$

L'équation tient compte des forces de masse (pesanteur et accélérations tangielles) appliquées en G_t.
Les accélérations radiales (centrifuges) et la force de Coriolis ont été négligées avec θ_m^2.

δJ au total en posant $z'_{c_0} - z'_{G_0} = d$.

(distance entre le centre de gravité et le centre de carène.)

$$M_{o'} = -P\theta(R-d) + \frac{P\omega^2\theta}{g}\left[(R-z'_{c_0})\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right) + r^2_{G_0}\right]$$

$$= -\theta\omega^2 J_G \quad \text{(équation du tangage.)}$$

ou encore en posant

$$\frac{1}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} r^2 dP = g\frac{J_G}{P} = R_I^2$$

où R_I = rayon d'inertie polaire par rapport à G_0.

$$\omega^2 = \frac{R-d}{\frac{R-z'_{c_0}}{g}\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right) + \frac{r^2_{G_0}}{g} + \frac{R_I^2}{g}}$$

ou

$$\boxed{\frac{1}{\omega^2} = \frac{\mathcal{H} l^2 (R-z'_{c_0})}{10 g h_0 (R-d)} + \frac{(r'^2_{G_0} + \frac{z'_{\mu_0} x'^2_{G_0}}{R})}{g(R-d)} + \frac{R_I^2}{g(R-d)}}$$

avec $R_I^2 = \frac{1}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \rho'^2 dP$ ρ' = distance à G_0 du centre de dP.

$$\mathcal{H} = 60 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\left[\frac{l^2 x'^2 \Omega(x')}{4} - \frac{x'^4 J(x')}{3}\right] dx'}{l^5}$$

$$R = \frac{\rho b l^3}{12 P} \qquad z'_{\mu_0} = z'_{c_0} - R \qquad d = z'_{c_0} - z'_{G_0}$$

Note. Les termes en $\frac{x'^2_{G_0}}{R}$ tombent si un axe rigide en O' absorbe les réactions verticales, car alors, à la page R 58, le terme $\frac{Px'_{G_0}}{bl}$ de la formule p' tombe.

Le premier des 3 termes du 2.d membre de l'expression $\frac{1}{\omega^2}$ donne l'influence de l'eau sous carène. Tout se passe comme si la profondeur moyenne de l'eau sous la quille était amplifiée lorsque le centre de gravité du bateau se trouve en dessous du plan d'eau et réduite dans le cas opposé ; le second terme donne l'influence des excentricités du centre de gravité du bateau par rapport au centre de rotation O' ; le troisième terme donne l'influence de la dispersion de la masse du bateau.
Les termes contiennent g et $R - d$.

La présence de g est logique puisque $\frac{\omega^2 l^2}{2g}$ correspond à un terme $\frac{v^2}{2g}$ d'une équation de Bernoulli et donne donc une variation de hauteur piézométrique due à une variation de vitesses.

$R - d$ s'annule lorsque le métacentre est confondu avec le centre de gravité. En pareil cas, la force Rot (qui passe toujours par μ) et les P et $\Sigma m j_{tang.}$ (qui passent toujours par G) passent constamment par un même point mobile avec θ. En ce point nous décomposons la résultante de toutes ces forces, suivant d'une part la direction Rot et d'autre part la direction O'G (lorsque un axe rigide en O' absorbe toute la réaction) ou la direction parallèle au plan d'eau (lorsque une accélération de O' est possible dans cette direction.)

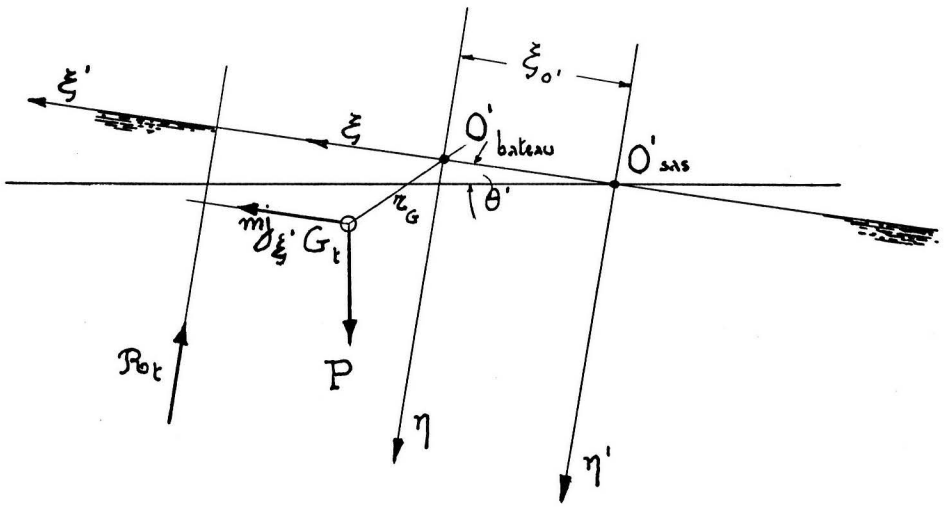
Dans les deux cas le mouvement de rotation autour de O' est nul et $\omega^2 = 0$.

Donc un mouvement ω du bateau peut s'arrêter à tout moment et être en équilibre de rotation, lorsque le centre de gravité et le métacentre sont confondus en un point.

7) Mouvement de translation de O'.

Nous supposons le bateau libre dans le sens du plan d'eau mais incapable d'enfoncement, le volume d'eau sous la quille restant constant.
Par rapport au système d'axes $(\xi' O'_{sas} \eta')$ du sas, le mouvement du bateau se compose d'un mouvement autour d'un système d'axes $(\xi O'_{bateau} \eta)$ et du mouvement de translation $\xi_{o'}$ de O'_{bateau} par rapport à O'_{sas}

Les axes ξ et ξ' sont constitués par le plan d'eau instantané.



Les forces créant le mouvement sont P et R_{ot}.

Les accélérations produites sont $\overleftarrow{mj_\xi}$ (mouvemt d'entraînement) et $\overbrace{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}}$ (mouvemt relatif) autour de O'_{bateau}

Nous négligeons toujours la force de Coriolis.

L'équation fondamentale de la dynamique, projetée suivant ξ donne :

$$(1)\quad \frac{P}{g}\left[\frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2} - \eta'_{Gt}\,\omega^2\theta\right] = -P\theta' = -P\frac{\omega^2\theta}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'^2_{Go}}{R}\right)$$

L'équation de rotation autour de O'_{bateau} donne :

$$(2)\quad \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(mj)_{tang.} + \frac{P}{g}\,\frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2}\,\eta'_{Gt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\mathcal{R}_t) + \Delta\mathcal{M}_{o'} + \mathcal{M}_{o'}(P).$$

$\mathcal{M}_{o'}(mj)_{tang.}$: ↓ p. R. 54 ; $\mathcal{M}_{o'}(\mathcal{R}_t)$: ↓ p. R. 63 ; $\Delta\mathcal{M}_{o'}$: ↓ p. R. 63 ; $\mathcal{M}_{o'}(P)$: ↓ p. R. 64 pour $\omega^2 = 0$

$$(1)'\quad \frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2} = -\omega^2\theta\left[\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'^2_{Go}}{R}\right] + z'_{G_o}\,\omega^2\theta$$

$$(1)''\quad \frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2} = -\omega^2\theta\left[\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'^2_{Go}}{R} - z'_{Go}\right] = -K\omega^2\theta$$

$$(2)'\quad \frac{-P}{g}\omega^2\theta\left(J_G + \frac{P}{g}z'^2_G\right) + \frac{P}{g}\frac{\partial^2 \xi_o}{\partial t^2}\,z'_{Gt} \quad (=)$$

$$= Px'_{G_o} + \frac{P\omega^2\theta}{g}\,\frac{R - z'_{Co}}{R}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'^2_{Go}}{R}\right) + P\theta(z'_{C_o} - R) - P(x'_{G_o} + z'_{G_o}\theta)$$

$$(2)''\quad \frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2} = -g\theta\,\frac{R-d}{z'_{G_o}} + \frac{\omega^2\theta}{z'_{G_o}}\left[\frac{J_G}{P} + z'^2_G + (R - z'_{C_o})\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'^2_{Go}}{R}\right)\right]$$

à titre de vérification, éliminons $\frac{\partial^2 \xi_{o'}}{\partial t^2}$ entre $(1)'$ et $(2)''$ et nous retrouvons l'équation :

$$\omega^2 = \frac{R - d}{(R-d)\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_o} - \frac{x'_{Go}}{R}\right) + x'^2_{G_o} + \frac{J_G}{P}}$$

de (1)'' nous déduisons :

$$\frac{\partial \xi_{o'}}{\partial t} = \frac{K}{\omega} \cos \omega t + C_1$$

$$\left[\frac{\partial \xi_{o'}}{\partial t}\right]_{t=\frac{T_1}{4}} = -\left[\frac{\partial \xi_{o'}}{\partial t}\right]_{t=\frac{3T_1}{4}}$$

puisque toutes les conditions sont égales et de signes contraires.

$\omega\frac{T_1}{4}$ et $\frac{3\omega T_1}{4}$ étant supplémentaires, nous trouvons $C_1 = 0$.

$$\xi_{o'} = \frac{K}{\omega^2} \sin \omega t + C_2 \qquad \xi_{o'} = 0 \text{ pour } t = 0 \quad \text{d'où} \quad C_2 = 0$$

$$\boxed{\xi_{o'} = \theta\left[\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} - z'_{G_o}\right]}$$

son maximum se produit pour $t = \frac{T_1}{4}$

$$\xi_{o'}^{max.} = \theta_{max}\left[\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} - z'_{G_o}\right] = \frac{2\zeta_{\frac{l}{2}}^{max}}{l}\left[\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} - z'_{G_o}\right]$$

pour $\zeta_{\frac{l}{2}}^{max} = 0.368$ m. (soit 8 phases de p.R.21)

$$h_o = 3 \text{ m.} \qquad x'_{G_o} = z'_{G_o} = 0 \qquad \mathcal{H} = 1$$

nous trouvons :

$$\xi_o^{max} = 2.20 \text{ m.}$$

$$\frac{\partial \xi_{o'}}{\partial t} = \theta_{max}\, \omega \cos \omega t \left[\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} - z'_{G_o}\right]$$

donc proportionnel à θ_m et justifie le fait d'avoir négligé cette valeur dans la formule de Coriolis pour établir l'équation du tangage (p.R 55 et p.R.68)

Il existe un point O'' du bateau dont le mouvement par rapport au sas est nul.

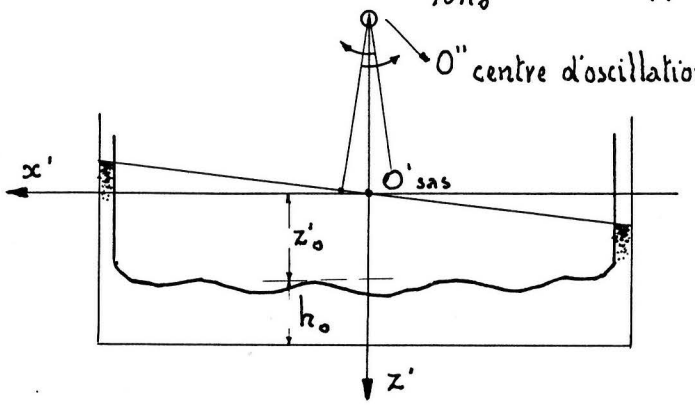
Cherchons ce point (x' z')

$$dx' = \xi_{o'} \cos\theta' + x'\theta \cong \theta\left[z' - z'_{G_o} + \frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right]$$

$$dz' = -\xi_{o'} \sin\theta' - x'\theta \cong -x'\theta$$

donc

$$O''\begin{cases} x' = 0 \\ z' = -\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - z'_{G_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right) = -R\left(\frac{6\mathcal{H}}{5}\frac{z'_o}{h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R^2} - \frac{z'_{G_o}}{R}\right) \end{cases}$$



Le point O'' se trouve sur la verticale de O'sas et est situé à environ $R \times \frac{6}{5}\frac{z'_o}{h_o}$ au dessus de O'_{sas} puisque les 2 derniers termes de ( ) sont petits et $\mathcal{H} \cong 1$.

<u>Donc le mouvement horizontal augmente avec l'immersion z'_o et diminue lorsque la hauteur d'eau sous la quille augmente.</u>

Un bateau à l'état lège a un plus petit mouvement d'oscillation θ autour du centre absolu O'' qu'un bateau chargé, se trouvant dans un même sas.

Jusqu'à présent, nous avons supposé l'absence de tout tourbillonnement d'eau sous la quille.

Si une partie de l'énergie se perd en tourbillonnements θ diminue et il faut alors affecter l'expression $\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)$ d'un coefficient de réduction, ce qui fait augmenter ω. (mouvement plus dur) et diminuer $\xi_{o'}$, et T. (période)

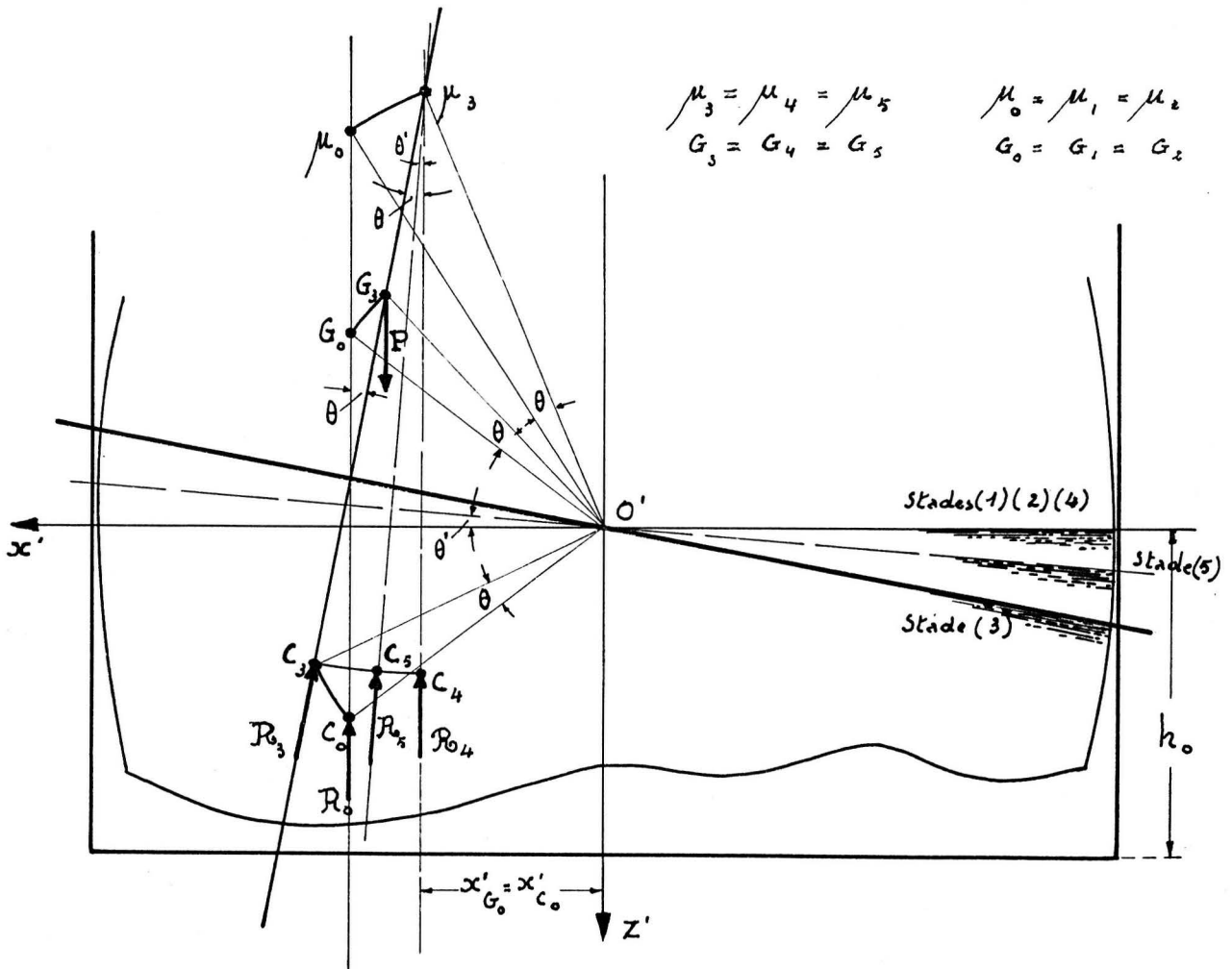
8.) CALCUL DE ω en partant de la décomposition des mouvements du bateau.

Considérons le déplacement du centre de carène en fonction du déplacement du bateau et du déplacement de la surface d'eau libre, réel ou fictif.

Nous avons un déplacement réel lorsque l'eau du sas vient librement à la surface devant et derrière le bateau.

Le déplacement est fictif lorsque l'eau ne peut que pousser sous la quille sans communication avec l'eau libre.

CROQUIS DES DIFFÉRENTS STADES



N.B. $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4 = P$

$$\mathcal{R}_5 = P\left[1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right]$$

1° Stade :

Le bateau et l'eau sont en repos $t = 0$

$p' = p'_0$ hydrostatique $\qquad v = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \qquad j = \frac{\partial \zeta}{\partial t^2} = 0$

[c'est un stade fictif, car en réalité $v \neq 0$]

en ce stade $x'_{C_0} = x'_{G_0} = \dfrac{b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x' p'_0 \, dx'}{\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p' \, dx} = \dfrac{-b\rho\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h \, dx'}{P}$

$$z'_{C_0} = \frac{b\rho\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{z'^2}{2} dx'}{P}$$

Le centre de carène est en C_0, le centre de gravité en G_0 ; C_0 et G_0 se trouvent sur une même verticale qui contient aussi le point μ_0 (métacentre) situé à R au dessus de C_0.

(R = rayon métacentrique $= \frac{\rho b l^3}{RP}$) $\qquad \mathcal{M}_{G_0}(P\mathcal{R}_0) = 0$

2ᵐᵉ Stade :

Le bateau et l'eau sont en repos, mais $v \neq 0$.

C'est déjà un stade réel (celui pour $t=0$) $p' = p'_0$ hydrostatique, ce qui se voit à la formule donnant p' à la page R 58.

Il faut constater que l'énergie cinétique $\frac{v^2}{2g}$ d'un point du bateau n'est pas transformée en pression p' au moment $t = 0$.

Le coefficient du terme en $\frac{\omega^2 l^2}{2g}$ étant nul. (ωl est une vitesse.)

Constatons aussi que la variation de hauteur $\zeta = x' \theta_m \sin \omega t$ est encore nulle et ne se transforme pas non plus en pression p'.

$\mathcal{R}_3 \equiv P \qquad \mathcal{M}_{o'}(P\mathcal{R}_2) = 0$

3.me Stade. (fictif)

Supposons que tout le système : eau + bateau tournent lentement de l'angle θ autour de O'. Il en sera de même de G, C et μ.

$\zeta \omega^2$ est supposé petit devant ζ. C_o tourne vers C_3.

$$x'_{C_3} - x'_{C_o} = z'_{C_o} \theta$$
$$z'_{C_o} - z'_{C_3} = x'_{C_o} \theta$$
$$x'_{G_o} - x'_{G_3} = z'_{G_o} \theta$$
$$z'_{G_3} - z'_{G_o} = x'_{G_o} \theta$$
$$\mathcal{R}_3 = P_3 = P$$

poussée verticale : $p' = p'_{\text{hydrostat.}} = p'_{o\ \text{hydrost.}} + \zeta - \zeta = p'_{o\ \text{hydrostatique}}$.

le terme $+\zeta$ est dû à l'accroissement de la charge d'eau hydrostatique (la surface libre s'élève de ζ.)

le terme $-\zeta$ est dû à la diminution de la cote z' de la quille.

poussée horizontale $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_{\text{hydrostatique}} = p'$.

4.me Stade. (fictif)

Faisons revenir lentement la surface libre de l'eau à l'horizontale, le bateau restant figé dans sa position du 3.me stade.

$\zeta \omega^2$ est toujours supposé petit devant ζ.

G reste en G_3 mais C_3 se déplace vers C_4 en tournant de θ autour de μ.

$\overline{\mu_3 C_4}$ est une verticale.

$$x'_{c_3} - x'_{c_4} = R\theta \quad \text{où } R = \text{rayon métacentrique} = \frac{\rho b l^3}{12 P}$$

$$z'_{c_3} = z'_{c_4}$$

poussée verticale : $p'_4 = p'_{\text{hydrost.}} = p'_{o\ \text{hydrost.}} - x'\theta$.

(la diminution de pression est due à l'abaissement de la charge d'eau)

poussée horizontale $s'_4 = p'_o - x'\theta$.

$$\mathcal{M}_o(P_4\ R_4) = -P(x'_{G_4} - x'_{c_4})$$

$$= -P[x'_{G_3} - x'_{c_3} + R\theta]$$

$$= -P[z'_{G_o}\theta + x'_{G_o} - z'_{c_o}\theta - x'_{G_o} + R\theta]$$

$$= -P\theta(R - d)$$

Remarquons à titre de vérification que :

$$R_4 = P_{\text{stat.}} = b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p'_x\, dx'$$

$$P x'_{c_4} = b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p'^{\text{stat}}_x\, x'_4\, dx'$$

$$x'_4 = x'_o + z'\theta$$

en effet $p'^{\text{stat}}_{x'} = \frac{P}{bl} + \rho(h_o - h) - \rho\theta x'$

$$P = b\left[\frac{P}{b} + 0 - 0\right] = P.$$

$$P(x'_{c_3} - R\theta) = b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[\frac{P x'}{bl} + \rho(z' - z'_o)x' - \rho\theta x'^2\right] dx' \quad (+)$$

$$+\theta b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left[\frac{P}{bl} + \rho(z' - z'_o) - \rho\theta x'\right] dx'.$$

$$P\left(x'_{G_0} + z'_{c_0}\theta - \rho\frac{\theta b l^3}{12}\right) = P x'_{G_0} - \rho\frac{\theta b l^3}{12} + \theta P z'_0 + \theta \rho b l z'_0 z'_{c_0} \quad (-)$$
$$- \rho b l \theta z'^2_0 - \theta^2 P x'_{G_0}.$$

ce qui est verifié, en tenant compte que le dernier terme du second membre est négligeable avec θ^2.

$p'_4 - p'_0$ $\quad (\mathcal{R}_4)_4 - (\mathcal{R}_H)_0$ $\quad s'_4 - s'_0$ etc. donnent l'influence de la position hydrostatique en hauteur ζ.

5me Stade :

Nous maintenons le bateau au repos, mais l'eau est supposée en mouvement rapide tel que $\zeta\omega^2$ soit grand par rapport à ζ.

La surface libre ne fait pas nécessairement l'angle θ avec l'horizontale. Supposons qu'elle s'établisse suivant une droite faisant l'angle θ' avec l'horizontale.

C se déplace de C_4 en C_5 en tournant de θ' autour de μ_3, G reste en place.

$$x'_{G_5} = x'_{G_3}$$
$$z'_{G_5} = z'_{G_3}$$
$$x'_{c_5} = x'_{c_4} + R\theta'$$
$$z'_{c_5} = z'_{c_4}$$

$$p'_5 = p'_4 + \frac{\omega^2\theta}{g}\left\{\frac{P x'_{G_0}}{bl} + \frac{\rho}{2h_0}\left[\frac{l^2}{4}x'\Omega - \frac{x'^3}{3}J\right] - \frac{\rho A l^3}{2h_0}\right\}$$

La condition $b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p'_5\, dx' = P\left(1 + \frac{x'_G\,\theta\omega^2}{g}\right)$ est verifiée.

x'_{c_5} est donné par :

$$b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'_5 p'_5\, dx' = P\left(1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)x'_{c_5}$$

$$b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'_5 p'_4\, dx' + \frac{b\omega^2\theta}{g}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'_5\left\{\frac{Px'_{G_0}}{bl} + \frac{\rho}{2h_0}\left[\frac{l^2}{4}x'\Omega - \frac{x'^3 J}{3}\right] - \frac{\rho A l^3}{h_0}\right\}dx'$$

$$= P\left(1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)x'_{c_5}.$$

$$b\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'_5 p'_4\, dx' + \frac{b\omega^2\theta}{g}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (x' + z'\theta)\left\{\frac{Px'_{G_0}}{bl} + \frac{\rho}{2h_0}\left[\frac{l^2}{4}x'\Omega - \frac{x'^3}{3}\right] - \frac{\rho A l^3}{h_0}\right\}dx'$$

(négligeable)

$$= P\left(1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)(x'_{c_4} + R\theta').$$

$$Px'_{c_4} + \frac{b\omega^2\theta\rho}{2gh_0}\int\left(\frac{l^2}{4}x'^2\Omega - \frac{x'^4 J}{3}\right)dx' = P\left(1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)(x'_{c_3} - R\theta + R\theta')$$

$$P(x'_{c_3} - R\theta) + \frac{b\omega^2\theta\rho l^5 \mathcal{H}}{gh_0\ 120} = P\left(1 + x'_{G_0}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)(x'_{c_3} - R\theta + R\theta').$$

$$P(x'_{c_3} - R\theta - x'_{c_3} + R\theta - R\theta') + \frac{\theta\omega^2}{g}\left[\frac{\mathcal{H} l^2 RP}{10h_0} - Px'_{G_0}(x'_{c_0} + \underbrace{z'_{c_0}\theta}_{\text{négligeable}} - R\theta + R\theta)\right] = 0$$

$$R\theta' P = \frac{\theta\omega^2}{g}\left[\frac{\mathcal{H} l^2 RP}{10h_0} - Px'_{G_0}x'_{c_0}\right].$$

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{\omega^2}{g}\left[\frac{\mathcal{H} l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right]$$

Nous verrons (formule p. R80) que pour $x'_{G_0} = 0$ $J_G = 0$ nous avons : $\frac{\omega^2 \mathcal{H} l^2}{10gh} = 1$

donc en ce cas $\frac{\theta'}{\theta} = 1$ et en général $\frac{\theta'}{\theta} \leq 1$.

Avant d'écrire l'équation $\mathcal{M}_o$, distinguons entre les liaisons imposées au bateau.

Cas A

Le bateau est assujetti à tourner autour d'un axe matériel horizontal en O' qui n'offre aucune résistance à la rotation (sauf au début lorsqu'il s'agit d'imprimer un mouvement oscillatoire au bateau.) mais qui absorbe toute réaction verticale ou horizontale.

En ce cas nous prenons le $\mathcal{M}_o$, de toutes les forces d'inertie (P et $mj^{\text{tangentiel}}_{\text{rotation}}$) et de toutes les pressions d'eau ($\mathcal{R}_V$ et $\mathcal{R}_H$) après avoir supprimé au 5me stade (p. R72 et 73) les termes en x'_{G_o} dans x'_{c_s} et θ'.

$$\mathcal{M}_{o'} = -P\left(1 - x'_{G_o}\frac{\theta\omega^2}{g}\right)x'_{G_s} + P\,z'_{G_o}\frac{\theta\omega^2}{g}\,z'_{G_s} + \mathcal{R}_{5_V}\,x'_{c_s} - \mathcal{R}_{5_H}\,z'_{c_s}$$

$$= -P\,x'_{G_s} + \frac{P\theta\omega^2}{g}\left(x'^2_{G_o} + z'^2_{G_o}\right) + P\,x'_{c_s} - P\,\theta' z'_{c_s}$$

$$= -P\left[x'_{G_o} + z'_{G_o}\theta\right] + \frac{P\theta\omega^2}{g}\,r_G^2 + P\,x'_{c_s} - P\,z'_{c_s}\frac{\theta\omega^2}{g}\left[\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right]$$

($\frac{x'^2_{G_o}}{R}$: supprimé pour le cas A)

$$= P\left[-x'_{G_o} - z'_{G_o}\theta + \frac{\theta\omega^2 r_G^2}{g} + \left(x'_{G_o} + R\theta' - R\theta + z'_{c_o}\theta\right) - \frac{\theta\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)\left(z'_{c_o} - x'_{G_o}\right)\right]$$

(x'_{G_o} : négligeable)

$$= P\theta\left[-z'_{G_o} + \frac{R\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right) - R + z'_{c_o} + \frac{\omega^2 r_G^2}{g} + z'_{c_o}\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)\right]$$

($\frac{x'^2_{G_o}}{R}$: supprimé pour le cas A ; supprimé pour le cas A)

$$\mathcal{M}_{o'} = P\theta\left[\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)\left(R - z'_{c_o}\right) + \frac{\omega^2 r_G^2}{g} + z'_{c_o} - z'_{G_o} - R\right].$$

($\frac{x'^2_{G_o}}{R}$: supprimé pour le cas A)

posons $z'_{c_o} - z'_{G_o} = d$

$$\mathcal{M}_{o'} = P\theta\left[\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)\left(R - z'_{c_o}\right) + \frac{\omega^2}{g}\,r_G^2 - \left(R - d\right)\right]$$

($\frac{x'^2_{G_o}}{R}$: supprimé pour le cas A)

l'équation du tangage devient :

$$+J_G \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -J_G \omega^2 \theta = P\theta \left[\frac{\omega^2}{g} \left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_0} - \cancel{\frac{x'^2_{G_0}}{R}} \right) (R - z'_{c_0}) + \frac{\omega^2}{g} r_G^2 - (R - d) \right]$$

(supprimé pour le cas A)

$$\text{et } \omega^2 = \frac{(R - d)}{\frac{R - z'_{c_0}}{g} \left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_0} - \cancel{\frac{x'^2_{G_0}}{R}} \right) + \frac{r_G^2}{g} + \frac{J_G}{P}}$$

(supprimé pour le cas A)

analysons cette formule.

α) Lorsque $R = z_{c_0}$ et $z_{G_0} = 0$ nous avons aussi $R - d = 0$

Le métacentre et le centre de gravité sont confondus et se trouvent à la surface libre. Pour tout petit mouvement θ du bateau, G et μ s'élèvent de la même quantité ζ.

Comme P et mj passent constamment par G et R_0 passe constamment par μ, toutes ces forces restent verticales, il n'y a pas de tendance à rotation autour de O'.

β) cas du plan rigide flottant.

$$x'_{G_0} = 0 \qquad z'_{G_0} = 0 \qquad r_G = 0$$

$$PR = \frac{\rho b l^3}{12} \qquad d = 0 \qquad \mathcal{H} = 1$$

$$\overset{\curvearrowright}{m_{O'}} = \theta PR \left[\frac{\omega^2}{g} \frac{\mathcal{H} l^2}{10 g h_0} - 1 \right]$$

$$-J_0 \omega^2 \theta = \theta \left[\frac{\omega^2}{g} \frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_0} - 1 \right] \frac{\rho b l^3}{12}$$

$$\text{d'où } \omega^2 = \frac{\frac{\rho b l^3}{12}}{\frac{\rho b l^5}{120 g h_0} + J_0}$$

formule trouvée antérieurement.

Cas B.

Le bateau est libre de se déplacer dès qu'on lui a imposé au début son mouvement d'oscillation.

La possibilité de déplacement vertical comporte une surface d'eau libre où l'eau se trouvant sous la quille à accès.

Pour le déplacement horizontal : nous supposons que celui-ci ne rencontre aucune résistance de la part de l'eau.

Un déplacement vertical uniforme de tout le bateau n'est pas un déplacement isocarène. Le déplacement horizontal est isocarène.
En ce cas nous transposons mj_V de G_o au point O' où cette force de masse verticale est reprise par la résultante centrée des $\Delta p'$ uniformes sous la quille, correspondant à l'enfoncement général.

$$\Delta p' = \frac{P x'_{G_o} \frac{\theta \omega^2}{g}}{l}$$

Le centre O' s'enfonce de $\Delta p'$ mais comme il entraîne l'axe des z' et les points C G μ il n'y a pas de changement aux formules de ce fait, étant entendu que le bateau subit une translation verticale périodique = $\Delta p'$.

Nous ne transposons pas mj_H au point O' où nous ne trouvons aucune réaction, mais nous le laissons en G où mj_H provoque une translation horizontale périodique de tout le bateau. $(\mathcal{R}_t)_H$ a le même effet.

Par rapport au cas A ci-devant il suffit de retrancher le moment dû à mj_H. et à $(\mathcal{R}_t)_H$.

Nous avons donc :

$$\mathcal{M}_{o'} = P\theta\left[\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right)(R - z'_{c_o}) + \frac{\omega^2}{g}\left(x'^2_{G_o} - z'^2_{G_o}\frac{(\mathcal{R}_t)_H}{mj_{tx'}}\right) - (R-d)\right] + P x'_{G_o}\frac{\theta\omega^2}{g}\left(x'_{G_o} + z'_{G_o}/\theta\right)$$

$\mathcal{R}_{t_H} = P\theta'$ pour θ' voir page R 73 pour $mj_{tx'}$ voir page R 54.

$$\mathcal{M}_{o'} = P\theta\left[\frac{\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'_{G_o}}{R}\right)(R - z'_{c_o} + z'_{G_o}) + \frac{\omega^2}{g}x'^2_{G_o} - (R-d)\right]$$

L'équation du tangage donne alors :

$$\omega^2 = \frac{(R-d)}{\frac{R-d}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10k_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R}\right) + \frac{x'^2_{G_o}}{g} + \frac{J_G}{P}}$$

Cas C.

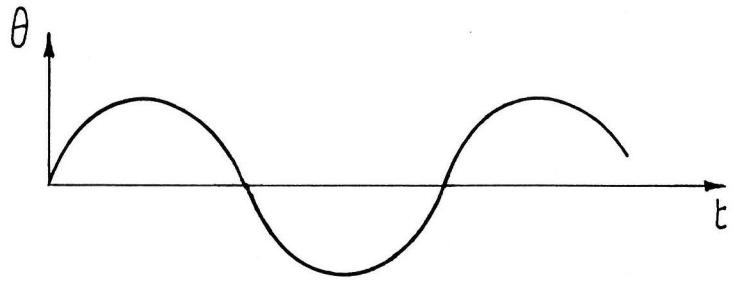
Comme le cas précédent, mais le bateau n'est pas libre de se déplacer verticalement parceque la surface de la quille ne lui permet pas de venir à la surface, le volume d'eau sous la quille restant réellement constant. Dans la formule donnant ω^2 au cas B il faut supprimer le terme $\frac{x'^2_{G_o}}{R}$. Le mouvement vertical périodique dû à $\Delta p'$ est remplacé par une surpression verticale périodique sous la quille avec la même valeur $\Delta p'$.

Cette sollicitation est d'ailleurs transmise aux parois du sas, tant latérales qu'inférieure qui sont à calculer en conséquence.

9) Réalisation de la condition imposée : $\theta = \theta_m \sin \omega t$.

Cette condition a été imposée au plan rigide flottant et au bateau avec carène irrégulière et centre de gravité excentré en hauteur et en longueur.

Comment peut-on supposer une telle loi sinusoïdale imposée sans devoir produire de l'énergie?



L'eau cherchant sa pulsation à énergie minimum ($\omega = \frac{\pi c}{l}$) tend à réagir suivant une loi sinusoïdale complexe.

Ceci comporte une loi s'écartant quelque peu de loi sinusoïdale imposée $\zeta = \zeta_m \sin \omega t$.

Cette tendance doit donc être contrecarrée par un mécanisme régulateur, solidaire de l'arbre matériel de rotation qui à tout instant t accélère (ou freine) le mouvement naturel en reprenant de (ou en cédant à) un accamulateur (agissant comme un volant) l'énergie nécessaire.

La somme de ce qui est emprunté et cédé est nulle parcequ'e si T est la période, à l'instant $t + \frac{T}{2}$ l'action du mécanisme régulateur est inversée par rapport à celle à l'instant t, à cause de la périodicité. - Donc, le problème traité suppose :

1° Une intervention mécanique au commencement pour réaliser l'état

initial (dénivellation et accélération nulles avec vitesses non nulles.)

Dès cet instant il ne faut plus apporter de l'énergie extérieure.

2° L'intervention permanente d'un mécanisme régulateur qui ne comporte aucun apport d'énergie, mais connecté à une masse d'inertie infinie par rapport aux emprunts ou dépots d'énergie.

On suppose évidemment que le mécanisme régulateur fonctionne sans frottements.

La pulsation résultante ω est plus grande du fait de l'action du mécanisme régulateur.

10) <u>Influence d'un couple mécanique $\mathcal{M}\theta = \mathcal{M}\theta_m \sin \omega t$. maintenu en permanence.</u>

Il faut distinguer 2 cas.

1) l'action mécanique est appliquée avec un ω propre différent du ω_{eau} résultant dans l'eau et trouvé par les formules ci-devant. En ce cas il y a perturbation et ω_{eau} diminue.

2) l'action mécanique est appliquée avec un ω propre égal à ω_{eau}. En ce cas il y a résonance et le mouvement augmente en dehors de toute limite.

Pour être complet, ajoutons y le 3me cas, normal:

Après l'instant initial l'action mécanique est limitée à la régularisation du mouvement sans apport d'énergie.

En ce cas ω_{eau} est maintenu constant.

11) Application au cas concret de Ronquières.

Soit un bateau de 1350 tonnes de chargé + 582 tonnes de poids propre en tout $P = 1932$ tonnes.

longueur 80,50 m. largeur 9.60 m.

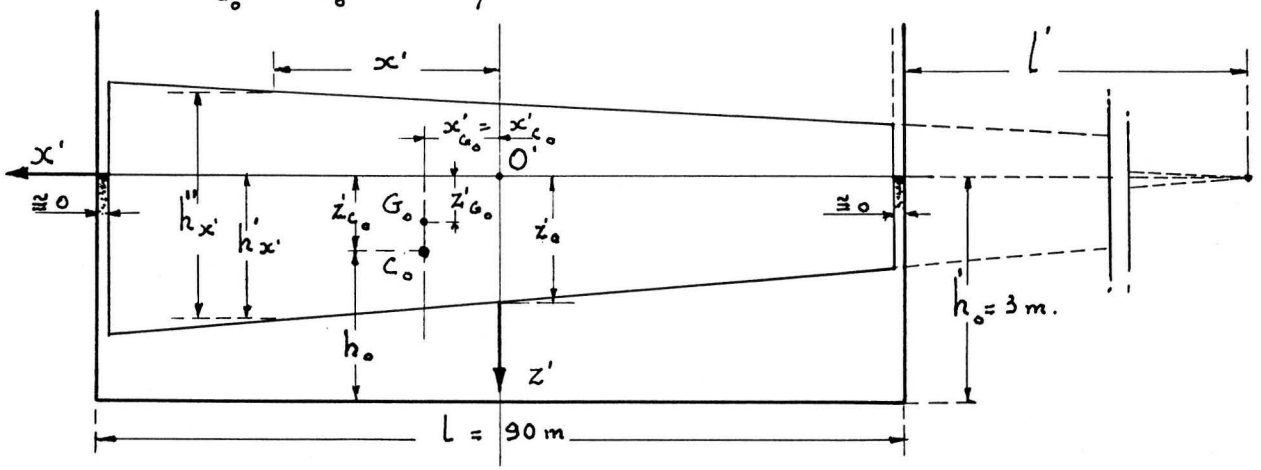
que nous remplaçons par $l = 90$ m. $b = 9.60 \times \frac{80.5}{90} \cong 8.60$ m.

$$z'_o = \frac{P}{\rho b l}$$

$h'_o = 3$ m. $\qquad h_o = h'_o - z'_o$

z'_{G_o} est compris entre 0 et 1.50 m.

$x'_{G_o} = x'_{C_o}$ est compris entre 0 et 2 m.



Soit un fond de quille plan et une masse uniformément répartie dans le volume du bateau.

$$l' = \frac{l^2 - 6 l x'_{G_o}}{12 x'_{G_o}}$$

$$z'_{C_o} = \frac{2P(l^2 + 3ll' + 3l'^2)}{3\rho b l (l + 2l')^2}$$

$dP = b h''_{x'} \delta \, dx'$ où δ = poids spécifique constant du volume total du bateau.

$h''_{x'} = \frac{h'_{x'}}{\delta}$ où $h''_{x'}$ = hauteur totale de la matière pesante au droit de x'.

$h'_{x'}$ = hauteur immergée au droit de x'

$$\frac{h'_{x'}}{z'_0} = \frac{l' + \frac{l}{2} + x'}{l' + \frac{l}{2}} = 1 + \frac{2x'}{2l' + l}$$

$$z'_{G_0} P = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(h'_{x'} - \frac{h''_{x'}}{2} \right) dP = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} h'_{x'} \left[1 - \frac{1}{2\delta} \right] b h'_{x'} \, dx'$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2\delta}\right) b \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \left(1 + \frac{2x'}{2l' + l}\right)^2 dx'.$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2\delta}\right) \frac{P}{l} z'_0 \left[l + \frac{l^3}{3(2l' + l)^2} \right]$$

$$z'_{G_0} = \left(1 - \frac{1}{2\delta}\right) z'_0 \left[1 + \frac{l^2}{3l(2l + l)^2} \right]$$

$$\frac{1}{\delta} = 2 - \frac{6 z'_{G_0} (2l' + l)^2}{z'_0 \left[3(2l' + l)^2 + l^2 \right]}$$

$$1 - \frac{1}{\delta} = \frac{6 z'_{G_0} (2l' + l)^2}{z'_0 \left[3(2l' + l)^2 + l^2 \right]} - 1$$

$$R_1^2 = \frac{1}{P} \iint z^2 \, d^2 P$$

$$d^2 P = b \delta \, dx' \, dz'$$

$$R_I^2 = \frac{b\delta}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx' \int_{-(h''_{x'}-h'_{x'})}^{+\frac{l}{2}} (x'^2 + z'^2)\, dz'$$

$$= \frac{b\delta}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx' \int_{z'_0(1+\frac{2x'}{2l'+l})(1-\frac{1}{\delta})}^{z'_0(1+\frac{2x'}{2l'+l})} [x'^2 + z'^2]\, dz'$$

$$R_I^2 = \frac{b\delta}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx' \left[\frac{x'^2 z'_0}{\delta}\left(1+\frac{2x'}{2l'+l}\right) + \frac{z'^3_0}{3\delta}\left(1+\frac{2x'}{2l'+l}\right)^3\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta}\right)\right] dx'.$$

$$= \frac{b}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'^2\left[z'_0 + \frac{4z'^3_0}{(2l'+l)^2}\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\right] dx' \qquad (+)$$

$$+ \frac{b}{P}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{z'^3_0}{3}\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right) dx'.$$

$$= \frac{b z'_0}{P}\left[1 + \frac{4z'^2_0}{(2l'+l)^2}\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\right]\frac{2l^3}{3\times 8} + \frac{b}{3P} z'^3_0\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right) l.$$

$$= \frac{b z'^3_0 l}{3P}\left[3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right]\left(\frac{l^2}{(2l'+l)^2}+1\right) + \frac{b z'_0 l^3}{12P}.$$

$$R_I^2 = \frac{b z'_0 l}{3P}\left[\frac{l^2}{4} + z'^2_0\left(3-\frac{3}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\right)\left(1+\frac{l^2}{(2l'+l)^2}\right]\right.$$

$$R_I^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{l^2}{4} + z_o'^2\left(3 - \frac{3}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right)\left(1 + \frac{l^2}{(2l'+l)^2}\right)\right]$$

a) Bateau chargé.

$P = 1932$ tonnes $\qquad h_o = 3 - 2.50 = 0.50$ m.

$$R = \frac{8.6 \times \overline{90}^3}{12 \times 1932} = 271 \text{ m.} \qquad z_o' = \frac{1932}{1 \times 8.60 \times 90} \cong 2.50 \text{ m.}$$

$\mathcal{H} = 1$

α) sans excentricité.

$x_{G_o} = 0$

$\mathcal{H} = 1 \qquad l' = \infty \qquad z'_{c_o} = \dfrac{2 \times 1932 \times 3}{3 \times 1 \times 8.60 \times 90 \times 4} = 1.25$ m.

I avec centre de gravité élevé.

$z'_{G_o} = 0 \qquad d = 1.25 - 0 = 1.25$ m.

$R - d = 271 - 1.25 = 269.75$ m.

$$\frac{1}{\delta} = 2 \qquad \delta = \frac{1}{2}$$

$$R_I^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\overline{90}^2}{4} + \overline{2.5}^2(3 - 6 + 4)\right] = 677.08 \text{ m}^2.$$

$$\frac{g(R-d)}{\omega^2} = \frac{1 \times \overline{90}^2 (271 - 1.25)}{10 \times 0.50} + 0 + 677.08 = 437.677.$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{437.677}{9.81 \times 269.75} = 166 \ \overline{\text{secondes}}^2$$

même valeur pour les cas A B C des pages R 77 et suivantes.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{166}} = 0.0777 \frac{1}{\text{sec.}} = 0.0777 \ \overline{\text{sec.}}^{-1}$$

$$T \text{ (période)} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.0777} = 80.5 \text{ sec.} \cong 1'20''$$

Comparons T à la période trouvée p. R 16 $T_1 = 33.3$ secondes (pour $h_o = 3$ m.)

Nous avons $80.5'' \cong 33.3\sqrt{\frac{3}{0.50}}$.

La faible différence est surtout due à la loi sinusoïdale simple imposée au bateau.

Donc, à longueur égale, la pulsation et la période sont surtout influencées par la profondeur d'eau sous la quille.

Remarquons que le terme 677.08 est absolument négligeable par rapport à celui 437.000. Donc la masse du bateau est inopérante pour la pulsation lorsque le bateau est long.

Le bateau long se comporte comme un plan rigide, flottant sans masse.

Si en règle générale nous pouvons dire que $R - d$ est un facteur stabilisant, que cette stabilité entraîne un grand ω^2 et, partant, des grandes accélérations j créant des efforts dans les câbles et les amarres, (mouvement dur d'un flotteur stable), cette affirmation n'est plus pertinente lorsque le 1^{r} terme est le seul opérant, car dans ce terme le facteur $R - d$ au dénominateur est compensé au numérateur par un terme $R - x'_c$ qui lui est presque égal. (du moins pour les bateaux longs à grand rayon métacentrique.)

Par contre, toujours pour les bateaux longs, si les j ne sont guère influencés par la masse du bateau, les mj lui sont proportionnelles et pour les bateaux longs nous pouvons dire $mj = \frac{KP}{l^2}$

Dans le cas actuel envisagé, le mouvement est une simple rotation autour de O' et aucune translation ni mj de translation n'est créée au cas A de la page R 74. Mais pour les cas B et C en supposant $\zeta_{max} = 0.368\,m$ il s'y ajoute un mouvement de translation périodique $\xi_{o'}^{max} = 2.20\,m.$ (voir p. R. 69)

Rapportons le déplacement vertical maximum de l'extrémité du bateau ainsi que le $j_{max.}$ au même endroit respectivement au déplacement horizontal maximum de O'_{bateau} et au $j_{max.}$ horizontal de O'.

$$\frac{\zeta^{max}_{\frac{l}{2}}}{\xi^{max}_{O'}} = \frac{j^{max}_{\frac{l}{2}\ vertical}}{j^{max}_{\frac{l}{2}\ horizont.}} = \frac{10 \times 0.50}{2 \times 90} = \frac{1}{36}$$

II avec centre de gravité abaissé.

$$z'_{G_0} = 1.50\ m. \qquad d = 1.25 - 1.50 = -0.25\ m.$$

$$R - d = 271 + 0.25 = 271.25$$

$$\frac{1}{\delta} = 2 - \frac{6 \times 1.50 \times 4}{2.50 \times 3 \times 4} = 2 - 1.2 = 0.8 \qquad \delta = 1.25$$

$$R^2_I = \frac{1}{3}\left[\frac{\overline{90}^2}{4} + 2.\overline{5}^2\,(3 - 2.4 + 0.64)\right]$$

$$= \frac{2025 + 6.25 \times 1.24}{3} = 675\ m^2$$

Cas A

$$\frac{g(R-d)}{\omega^2} = \frac{1 \times \overline{90}^2 (271 - 1.25)}{10 \times 0.50} + 1.\overline{5}^2 + 675$$

$$= 437.000 + 2.35 + 675 \cong 437.677.$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{437.677}{9.81 \times 271.25} = 165\ \overline{sec.}^2 \qquad \omega = 0.078\ \overline{sec.}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 80.7\ sec. \cong 1'20''$$

Remarquons l'influence absolument négligeable de la dénivellation du centre de gravité.

Cas B et C.

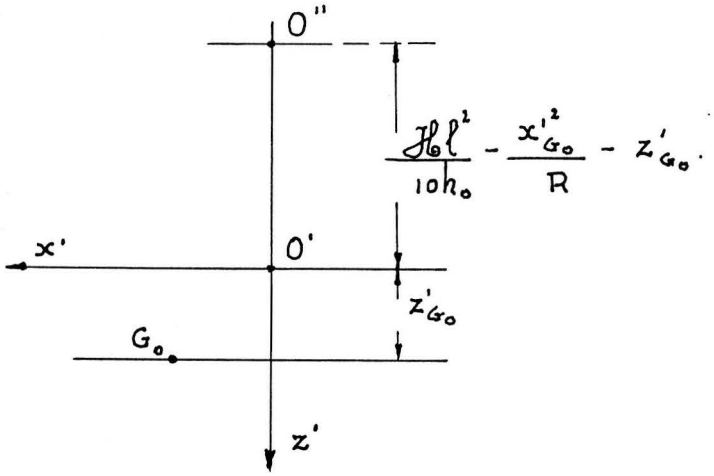
$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{1 \times \overline{90}^2}{10 \times 0.50 \times 9.81} + \frac{675}{9.81 \times 271.25} = 155.3 + 0.25 = 155.55$$

$$\omega = 0.08 \ \overline{sec.}^{-1} \qquad T = 1'19''$$

Cherchons pour le cas B le centre d'oscillation absolu O''.

$$z'_{O''} = -271 \left[\frac{6 \times 1}{5} \times \frac{2.50}{0.50} - 0 - \frac{1.5}{271} \right] = -1625 \text{ m.} \left(\cong -6\,R \right)$$

Si nous voulons arrêter le mouvement horizontal du centre de gravité par un effort horizontal longitudinal F (câble infiniment raide attaché au sas) appliqué au centre de gravité G du bateau, nous avons



$$\overleftarrow{dx'_{G_o}} = \left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} \right) d\theta$$

$$\frac{\delta^2 x'_{G_o}}{\delta t} = -\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'_{G_o}}{R} \right) \theta_m \omega^2 \sin \omega t$$

$$\overleftarrow{j_H} = -\left(\frac{\mathcal{H} l^2}{10 h_o} - \frac{x'^2_{G_o}}{R} \right) \omega^2 \theta$$

pour annuler simultanément $\overleftarrow{j_H}$ $\overleftarrow{v_H}$ et $\overleftarrow{dx'_{G_o}}$ il suffit de tirer

avec $\overrightarrow{F} = \overleftarrow{mj}$ ou $\overleftarrow{F} = \frac{P\omega^2}{g}\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right)\theta$ et d'avoir un câble inextensible et horizontal.

Remplaçant ω^2 par sa valeur trouvée antérieurement nous trouvons:

$$\overleftarrow{F} = \frac{P\theta\left[\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right]}{\left[\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right] + \frac{x'^2_{G_0}}{R-d} + \frac{R_I^2}{R-d}} = \frac{P\theta}{\frac{x'^2_{G_0} - R_I^2}{R-d}} \cong P\theta$$
$$1 + \frac{\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}}{\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}}$$

F est théoriquement indépendant de ω et pratiquement indépendant des dimensions et excentricités du bateau. La seule condition posée est que le bateau remplisse tout le sas.

Dans le cas actuel nous avons :

$$\overleftarrow{F} = 1932 \times \frac{2\zeta^{max}_{\frac{l}{2}}}{l} = \frac{1932 \times 2 \times 0.368}{90} = 15.8\ T.$$

correspondant à un $\zeta^{max}_{\frac{l}{2}} = 0.368\ m.$ soit la dénivellation produite dans un sas accéléré après une succession malencontreuse de 8 phases.

Pour une dénivellation 8 fois plus petite, correspondant à une phase normale dans un sas accéléré

nous aurions : $\overleftarrow{F} = \frac{15.8}{8} \cong 2\ T.$

Il faut tirer dans un sens tel, que le bateau se dirige vers le coté où l'eau a monté. Si on ne tire pas, le bateau se déplacera librement d'ailleurs dans le même sens.

Les chiffres calculés sont des maxima ; puisque jusqu'ici nous avons

négligé les frottements et les tourbillons, qui affectent l'expression $\left(\frac{\mathcal{H}l^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right)$ d'un coefficient réducteur. En plus nous avons négligé l'élasticité du câble de retenue ; en réalité le câble n'arrête pas durement tout le mouvement, mais il y a partage entre un déplacement (encore permis par l'élasticité du câble) et l'effort de retenue.

β) avec excentricité $x'_{G_0} = 2$ m.

$$l' = \frac{\overline{90}^2 - 6 \times 90 \times 2}{12 \times 2} = \frac{8100 - 1080}{24} = 293 \text{ m.}$$

$$x'_{C_0} = \frac{2 \times 1932\left(\overline{90}^2 + 3 \times 90 \times 293 + 3 \times \overline{293}^2\right)}{3 \times 1 \times 8.6 \times 90(90 + 2 \times 293)^2} = 1.26 \text{ m.}$$

$$\mathcal{H} = \frac{60h_0}{l^5}\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x'dx' \int_0^{x'} \left(\frac{l^2}{4} - x'^2\right)\frac{dx'}{h}$$

avec $\boxed{h = h_0 - kx'}$

posons $\boxed{\frac{2h_0}{kl} = \beta}$

nous trouvons $\boxed{\mathcal{H} = \frac{5}{8}\beta^2(5 - 3\beta^2) - \frac{15}{16}\beta(1 - \beta^2)\ln\frac{\beta - 1}{\beta + 1}}$

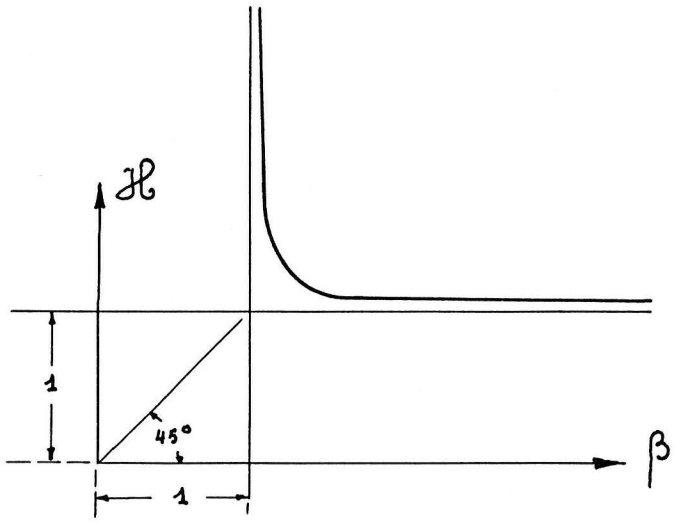
La fonction $\mathcal{H} = f(\beta)$ présente les particularités suivantes :

1°) elle ne change pas de valeur lorsque k change de signe.

2°) elle tend vers l'unité lorsque k tend vers zéro.

3°) elle est supérieure à l'unité pour $1 < k < \infty$.

Ce qui est toujours réalisé, car le fond plan de la quille ne peut toucher le fond du sas.



pour $\beta = 1.50$ $\mathcal{H} = 1.075$

$\beta = 1.25$ $\mathcal{H} = 1.118$

$\beta = 1.10$ $\mathcal{H} =$.

$\beta = 1.05$ $\mathcal{H} =$.

Dans notre cas actuel :

$$\frac{h'_o - h}{2.50} = \frac{l' + \frac{l}{2} + x'}{l' + \frac{l}{2}}$$

$$\text{d'où } h = h'_o - 2.50\left[1 + \frac{2x'}{2l' + l}\right]$$

$$= 3 - 2.50\left[1 + \frac{2x'}{676}\right]$$

$$= 0.50 - 0.0074\, x'$$

$$k = 0.0074$$

$$\beta = \frac{2 \times 0.50}{0.0074 \times 90} = 1.50 \qquad \mathcal{H} = 1.075$$

I) $z'_{G_0} = 0$ $\qquad d = z'_{c_0} - z'_{G_0} = 1.26 - 0 = 1.26\ m.$

$\frac{1}{\delta} = 2 \qquad \delta = \frac{1}{2}$

$$R_I^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\overline{90}^2}{4} + 2.\overline{5}^2\,(3 - 3\times 2 + 4)\left(1 + \frac{\overline{90}^2}{(5.86+90)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{2031}{3} = 676\ m.^2$$

Cas A (axe rigide en O')

$$\frac{g(R-d)}{\omega^2} = (R - z'_{c_0})\left[\frac{Hol^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right] + r^2_{G_0} + R_I^2$$

$$= (271 - 1.26)\left[\frac{1.075 \times \overline{90}^2}{10 \times 0.50} - \frac{4}{271}\right] + (4+0) + 676$$

$$= 470^{000} + 4 + 676 = 470^{680}$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{470.680}{9.81 \times 269.74} = 178.5\ \overline{sec}^2 \qquad \omega = 0.0748\ \overline{sec.}^{-1}$$

$$T = 84\ sec. = 1'24''$$

Cas B et C (absence d'axe rigide)

= Les ω diffèrent peu de ceux trouvés au cas A.

II) $z'_{G_0} = 1.50\ m. \qquad d = z'_{c_0} - z'_{G_0} = 1.26 - 1.50 = -0.24\ m.$

$$\frac{1}{\delta} = 2 - \frac{6 \times 1.50(586+90)^2}{2.50\left[3(586+90)^2 + \overline{90}^2\right.} = 2 - 1.2 = 0.8$$

$$\delta = 1.25\ m.$$

$$R_I^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\overline{90}^2}{4} + 2.\overline{5}^2\,(3 - 2.4 + 0.64)\left(1 + \frac{\overline{90}^2}{6\overline{76}^2}\right)\right] = 677.7\ m.^2$$

Cas A

$$\frac{g(R-d)}{\omega^2} = (R - z'_{c_0})\left[\frac{\mathcal{H}\ell^2}{10h_0} - \frac{x'^2_{G_0}}{R}\right] + r^2_{G_0} + R_I^2$$

$$= (2.71 - 1.26)\left[\frac{1.075 \times \overline{90}^2}{10 \times 0.50} - \frac{4}{271}\right] + (4 + 225) + 677.7$$

$$= 470000 + 684 = 470684$$

valeurs peu différentes pour ω et T de celles des cas précédents.

Cas B et C

donnent pratiquement les mêmes valeurs

b) bateau à l'état lège. $P = 582$ tonnes.

$$z'_0 = \frac{582}{1 \times 8.60 \times 90} = 0.75\ m. \qquad h_0 = 3 - 0.75 = 2.25\ m.$$

$$R = \frac{8.6 \times \overline{90}^3}{12 \times 582} = 895\ m. \qquad z'_{c_0} = \frac{2 \times 582 \times 3}{3 \times 1 \times 8.60 \times 90 \times 4} = 0.377\ m.$$

nous n'envisageons que le cas des excentricités nulles $z'_{G_0} = x'_{G_0} = 0$.

$$d = 0.377 - 0 = 0.377\ m. \qquad \ell' = \infty$$

$$R - d = 895 - 0.377 = 894.623\ m. \qquad \frac{1}{\delta} = 2$$

$$R_I^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{\overline{90}^2}{4} + 0.\overline{75}^2(3 - 6 + 4)\right] = 675.2\ m^2 \qquad \mathcal{H} = 1$$

$$g(R-d) = \frac{1 \times \overline{90}^2 (895 - 0.377)}{10 \times 2.25} + 0 + 675.2 \cong 322.675$$

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{322.675}{9.81 \times 894.623} = 36.8\ \overline{sec.}^2$$

$$\omega = 0.165\ \overline{sec.}^{-1} \qquad T = 38\ sec. = 38''$$

Remarquons l'influence prépondérante de la hauteur d'eau sous la quille, qui réduit T au cas d'un bateau lège et qui augmente la pulsation ω. (h_0 étant plus grand que pour un bateau chargé.)

Pour le bateau lège envisagé, l'effort horizontal de retenue appliqué au centre de gravité du bateau devient, pour un $\zeta^{max}_{\frac{\ell}{2}} = 0.368\ m.$

$$F = 582\ T. \times \frac{2 \times 0.368}{90} = 4.75\ T < 15.8\ T.$$

(résultat trouvé pour le bateau chargé.)